நிலையியல்.

— இராஜகோபாலன் (கே)

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண் — 210

நிலையியல்

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர்
கே. இராஜகோபாலன், எம்.ஏ., எல்.டி.,
முதல்வர்,
சர் தியாகராய கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

தமிழக அரசு

First Edition—December 1969

B.T.P. No. 210

STATICS for B.Sc.

K. RAJAGOPALAN

Net Price Rs. 5-00
(No discount)

Printed By
WELDUN PRESS,
19, Dr. Radhakrishnan Nagar
Madras-21,

அணிந்துரை

(திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன், தமிழகக் கல்வி-சுகாதார அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி எட்டு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ., வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர்; 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ்வகையில் கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெரு முயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'நிலையியல்' என்ற இந்நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 210ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 245 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம்கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. முன்னுரை

(Introduction)

1. ஒரு பொருள் (Body) என்பது ஒவ்வொரு திசையிலும் வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு சடப்பகுதியாகும்.

2. ஒரு துகள் (Particle) என்பது ஒரு மிகச் சிறிய சடப்பகுதியாகும். அதைப் பொருண்மையோடு கூடிய ஒரு புள்ளி எனக் கருதலாம்.

3. ஓய்வு (Rest) : ஒரு பொருள் தன்னைச் சுற்றியுள்ள பொருள்களை நோக்கத் தனது நிலையை மாற்றுதிருக்கும்பொழுது, அது ஓய்விலிருக்கின்றதெனப்படும்.

4. விசை (Force) என்பது ஒரு பொருளினுடைய ஓய்வு நிலையையேனும் அல்லது அதன் சீரியக்க நிலையையேனும் மாற்றுகின்ற அல்லது மாற்ற முயலுகின்ற யாதானு மொன்ருகும்.

5. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் (Rigid Body) என்பது தன்னுடைய பகுதிகள் ஒன்றுக்கொன்று மாரு நிலையிலிருக்கும்படி அமைந்த ஒரு பொருள்.

இயற்கையில் ஒரு பொருளாயினும் முழு நிறைவான உறுதி கொண்டதன்று. விசை பிரயோகப்பட்டால், ஒவ்வொரு பொருளும் மிகச் சிறிய வளவிற்கேனும் வளைந்துகொடுத்து வடிவ மாறுபாடு எய்தலாம். ஆகையால், முழுநிறைவான உறுதிப்பொருள் என்பது ஒரு துகள் என்பதைப் போலவே கற்பனையானதொன்ருகும்.

எனினும், நம் ஆராய்ச்சியை எளிதாக்கும் வகையில், நாம் எடுத்துக் கூறவேண்டிய எல்லாப் பொருள்களும் முழுநிறைவான உறுதி கொண்டனவென்று கொள்வோம்.

6. **சமவிசைகள்** (Equal forces) இருவிசைகள் ஒரு துகளின் மீது எதிர்த்திசைகளிலே தாக்க, அத்துகள் ஓய்விலிருந்தால், அவ்விரு விசைகளும் சமன் எனப்படும்

7. **சமநிலை** (Equilibrium) இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருளின்மீது தாக்கும்பொழுது, அப்பொருள் ஓய்விலிருக்கும் வண்ணம் அவை அமைந்தால் அவ்விசைகள் சமநிலையில் உள்ளன எனப்படும்.

8. **நிலையியக்க வியல்** (Mechanics) பொருள்களின்மேல் விசைகளினால் ஏற்படும் விளைவுகளைப்பற்றிக் கூறும் நூலாகும்.

இது **நிலையியல்**(Statics) என்றும், **இயக்கவிசையியல்**(Dynamics) என்றும் இருபகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது.

அநேக விசைகள் ஒருபொருளைத் தாக்கினால், அதன் பலனாக (1) அப்பொருள் ஓய்வு நிலை எய்தலாம் அல்லது அதன் இயக்கம் தவிர்க்கப்படலாம்; அல்லது (2) அப்பொருளில் இயக்கம் தோற்றுவிக்கப் படலாம் அல்லது அவ்வியக்கம் மாற்றப்படலாம்.

9. **நிலையியல்** (Statics) என்பது, விசைகளின் தாக்கத்திற்குட்பட்ட பொருள்கள் ஓய்விலிருக்கும் வண்ணம் விசைகள் அமையப் பெற்ற நிலையில் பொருள்களின்மீது விசைகளின் ~~தாக்கத்தைப்~~ தாக்குதலைப் பற்றிக் கூறும் நூலாகும்.

பொருள்களின்மீது விசைகள் தாக்கத்தின் காரணமாக இயக்கம் ஏற்படுவதைப்பற்றிக் கூறுவது **இயக்க விசையியல்** (Dynamics) எனப்படும்.

10. **நியூட்டனின் இயக்க விதிகள்** (Newton's Laws of motion).

விதி I

ஒவ்வொரு பொருளும் தனக்குப் புறமாகவுள்ள ஒரு விசையால் தாக்கப்பட்டு முடுக்கப்பட்டாலன்றித் தனது அசைவில்லாத நிலையிலோ. அல்லது ஒரு நேர்கோட்டிலுள்ள சீரியக்க நிலையிலோ தொடர்ந்திருக்கும்.

விதி II

ஒரு பொருளில் ஏற்படும் உந்தமாறுபாடு வீதம் அதன்மீது செயல்படும் விசைக்கு விகிதசமமாய் அவ்விசைத்தாக்கு நேர்க்கோட்டுத் திசையிலேயே நடைபெறும்.

விதி III

ஒவ்வொரு விசைத்தாக்கத்திற்கும் ஒரு சமவெதிர் விசைத்தாக்கம் உண்டு.

இவ்விதிகளை முறையான வடிவில் முதன்முதலாக நியூட்டன் வெளியிட்டார். ஆகையால், இவை நியூட்டன் இயக்க விதிகள் எனப்படும்.

இம்மூன்று விதிகட்குந் திட்டமாய் முறைமையான நிரூபணம் யாதும் பரிசோதனை முறையாலேனும், பிறமுறையாலேனுங் கொடுத்தல் இயலாது. எனினும், மேற்கூறிய மூன்று விதிகளும் இயக்க விசையியலுக்கு அடிப்படையானவை. இந்த இயக்க விசையியலையே மூலமாக வானியல் (Astronomy) கொண்டுள்ளது. இப்பொழுது வானியற் கொள்கையிலிருந்து பெற்ற பலன்களும், கண்டு பதிவு செய்யும் வானியற் நிகழ்ச்சிகளும் முற்றும் பொருந்திக் காணப்படுகின்றன. உதாரணமாக, மானுமிப் பஞ்சாங்கம் நாலாண்டுக்கு முன் வெளியிடப்படுகின்றது. அதன்கண் திங்களினியக்கமுங் கோள்களினியக்கமும் முன்னதாகத் தரப்படுகின்றன. சூரிய, சந்திர கிரகணங்களானவை நிகழும் நேரங்களும், இடங்களும் வானியல் கணக்கீடுகளினுதவியால் முன்னதாக அறிவிக்கப்படுகின்றன. அதில் கூறப்படும் முன் தெரிவிப்புகள் என்றுந் திருத்தமானவை என்று நிகழ்ச்சிகள் நிரூபிக்கின்றன.

எனவே, நியூட்டனின் இயக்க விதிகளின் உண்மையை இயற்கையே உண்மை என்று நிறுவுகின்றது.

இவ்விதிகள், இயக்க விசையியலுக்கு மட்டுமல்லாமல் நிலையியலுக்கும் அடிப்படையாகும். ஏனெனில், நிலையியல் என்பது இயக்க விசையியலில் பொருள்கள் இயங்காமல் காணப்படும் ஒருதனி வகையே எனக் கொள்ளலாம். மேலும், நிலையியலின் வினாக்கள் இயக்க விசையியலின் வினாக்களின் எல்லை வடிவமாகக் கொள்ளலாம். மேலும், இவ்விதிகளினால் பெறக்கிடைக்கும் விசையின் வரையறை, அதை அளக்கும் முறை, விசைகளின் விளைவு என்பனவெல்லாம்; நிலையியலின் அடிப்படையாகவும் அமைகின்றன.

இவ்விதிகளைப் பற்றி இயக்கவிசையியல் நூல்களில் நிறைவாக ஆய்வு செய்யப்பட்டிருப்பதைக் காணலாம்.

இப்பொழுது இவ்விதிகளின் உட்பொருள் பற்றி இங்குச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடுவோம்.

முதல் விதி

பொருள்களிடத்திலுள்ள தமது இயக்கத்தைத் தாமாக மாற்றிக் கொள்ளவியலாத குணத்தையே பொருள்களின் 'நிலைமம்' அல்லது 'சடத்துவம்' (Inertia) என்று கூறுவார்கள். பொருள்களுக்கு இந்த 'நிலைமம்' என்னும் குணம் உண்டு என்பதையே முதல் விதிகூறுகிறது. மற்றும், பொருள்களின் இயக்கத்தை மாற்றுவது அதாவது பொருள்களில் முடுக்கத்தை யுண்டாக்குவதே "விசை" என்று விசையின் வரைவிலக்கணத்தையும் இவ்விதி உள்ளடக்கி நிற்கிறது.

இரண்டாம் விதி

இவ்விதியிலிருந்து, இயக்கவிசையியல் நூல்களில் விளக்கப்பட்டிருப்பதுபோல், விசையை அளக்கும் முறையைப் பெறுகின்றோம்.

மேலும், இரண்டாவது விதி "விசைகளின் தற்சார்பு" தத்துவத்தைக் (Principle of Independence of forces) கூறுகிறது.

(அ-து) ஒரு விசையால் ஏற்படும் உந்தமாற்றம் அவ்விசை செயல்படும் திசையில் உள்ளதென இரண்டாம் விதியின் பிற்பகுதி கூறுகிறது.

ஒருவிசை ஒரு பொருளைத் தாக்கி, அதனால் ஏற்படும் விளைவு அதேசமயத்தில் அப்பொருள்மீது தாக்கும் ஏனைய விசைகளைப் பொறுத்ததாக இல்லை. ஆகையால், ஓய்விலோ அல்லது இயக்கத்திலோ உள்ள ஒரு துகளை ஒரு விசைத்தொகுதி தாக்கினால், அவற்றின் கூட்டு விளைவானது அத்துகள் ஓய்விலிருப்பதெனக் கொண்டு, அதன் கண் ஒவ்வொரு விசையும் ஏனையவையின்றி விளைவு தருகின்றதெனக் கொண்டு, அவ்விளைவுகளின் சேர்க்கையாற் காணப்படும். இது பின்னே கூறப்படும் 'விசை இணைகரவிதி'யின் (Parallelogram law of forces) அடிப்படையாகும்.

வீழும் பொருள்களின் முடுக்கம்

காற்றின் தடை இல்லாவிடில், அந்தரத்திலே தன்வயமாக விடப்பட்ட ஒவ்வொரு பொருளும் ஒரே முடுக்கத்துடன் கீழே விழும் என்பது பரிசோதனை வாயிலாகக் கண்டறிந்த உண்மை.

இதைப் 'பூமிக்கவர்ச்சியின் முடுக்கம்' (Acceleration due to gravity) என்று கூறுவார்கள். இதை எப்போதும் 'g' என்ற எழுத்தால் குறிப்பது மரபு. சாமானியமாய் g-யின் மதிப்பைப் பிரிட்டிஷ் திட்டத்தில் (F. P. S.) 32 அடி/விநாடி^{2} என்றும், மெட்ரிக் திட்டத்தில் (C. G. S.) 981 செண்டிமீட்டர்/விநாடி ^{2} என்றும் கொள்ளலாம்.

ஓரிடத்தில் பூமிக்கவர்ச்சிக் குரிய முடுக்கம் 'g' அலகுகள் என்று கூறும்போது, ஒரு பொருளை அந்த இடத்தில் தன் வயமாக விழும்படி விட்டால் அதன் வேகம் ஒவ்வொரு விநாடியிலும் g அலகுகள் வீதம் அதிகரிக்கும் என்பதே பொருள்.

நிறையும் (Mass) எடையும் (Weight)

எடை

ஒரு பொருளின் 'எடை' (Weight) என்பது அப்பொருளைப் பூமியை நோக்கி இழுக்கும் சக்தியின் அளவு ஆகும் (அ-து) அப்பொருளைப் புவி ஈர்க்கும் விசையாகும்.

பூமிக்கவர்ச்சியின் முடுக்கம் எல்லாவிடங்களிலும் ஒன்றாக இருப்பதில்லை.

இதன் மதிப்புக் கடல் மட்டத்தில் (at sea level) பூமியின் நடுவவரைக்கு (Equator) அருகில் மீச்சிறு (minimum) மதிப்பையும் துருவங்களுக்கு அருகே மீப்பெரு (maximum) மதிப்பையும் அடைகிறது. எனவே, ஒரு பொருளின் எடையும் நடுவரைக்கு அருகில் மீச்சிறு மதிப்பையும், துருவங்களுக்கருகே மீப்பெரு மதிப்பையும் பெறும்.

வில்தராசு (spring balance) இவ்வெடையை அளப்பதற்குரிய கருவியாகும். இதில் ஒரு பொருளின் எடை, தராசின் வில்லை ஏதோ ஓரளவு நீட்டுவதற்கு வேண்டிய விசையுடன் ஒப்பிடப்படுகின்றது.

வில்தராசை வெவ்வேறிடங்களுக்கு எடுத்துச் சென்றால், அப்பொருளின் எடை மாறுவதைக் காணலாம். ஒரு பொருள் தானாக வீழும் பொழுது அதனுடைய எடை அதன்மேல் செயல்பட்டு இதனால் ஏற்படும் விசையின் காரணமாக அப்பொருளில் முடுக்கம் ஏற்படுகிறது. அப்பொருள் பூமியில் விழுந்து நகராமல் நின்று தரையில் ஓய்விலிருப்பினும், அப்பொருளின் எடை அதில் செயல்பட்டுக்கொண்டிருக்கிறது. ஆனால், அப்பொருளின் மேல் தரையின் எதிர்த்தாக்கத்தின் காரணமாக இயக்கம் தடைபடுகிறது.

நிறை

தரப்பட்ட ஒரு பொருளின் எடை W-யும், பூமிக்கவர்ச்சியின் முடுக்கம் g-யும் சமவீத அளவுடையனவாய் இருக்கின்றன.

(அ-து) தரப்பட்ட ஒரு பொருளுக்கு $\frac{W}{g}$ எந்த இடத்திலும் ஒரு மாறிலியாகும். பொருத்தமான அலகுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டபின், ஒரே பொருளுக்கு எவ்விடத்திலும் மாறிலியாக இருக்கும் $\frac{W}{g}$ என்ற விகிதத்தை, அப்பொருளின் **நிறை** (Mass) என வழங்குகிறோம்.

ஒரு பொருளின் நிறை, அதன் கனபரிமாணம், அதன் கட்டமைவு போன்றவையைச் சார்ந்திருந்தாலும், பிரபஞ்சத்தில் அப்பொருளின் நிலையைப் பொறுத்ததாயில்லை.

ஆகவே, ஒரு பொருளின் எடை இடத்துக்கிடம் மாறினும், அப் பொருளின் நிறை இப்பிரபஞ்சத்தில் எந்த இடத்திலும் ஒன்றுகவே இருக்கும்.

இரண்டு பொருள்களின் நிறையை ஒப்பிடச் சாமானிய தரா[illegible] பயன்படுகிறது.

சாமானிய தராசில் நாம் நிறுக்கும்போது, இரண்டு பொருள்களின் எடையைத்தான் ஒப்பிடுகிறோம். ஆனல், அவை இரண்டும் ஒரே இடத்தில் இருப்பதால், g-யின் மதிப்பு இரண்டுக்கும் ஒன்றேயாகும். அதனுல் அவைகளின் நிறைகளும் ஒப்பிடப்படுகின்றன. ஆகையால், சாமானிய தராசில் நிறுத்தால், ஒரு பொருளின் நிறை இப்பிரபஞ்சத்திலே எந்த இடத்திலும் ஒன்றுகவே இருக்கும்.

குறிப்பு—நடைமுறையில், ஒருபொருளின் நிறையை நிர்ணயம் செய்து அதையே அப்பொருளின் எடை என்று கூறுகிறோம். இது கணிதநூல் முறைப்படி தவறுகும்.

11. உந்தம் (Momentum)

ஒரு பொருளை மெதுவாக இயக்குதலைவிட வேகமாக இயங்குவதற்கு அதிக ஆற்றல் தேவை. எனவே, ஒரு பொருளில் வேகமாற்றத்தை ஏற்படுத்த தேவையான ஆற்றல் (1) அப்பொருளின் நிறையின்மீது (2) அதில் உண்டாக்கவேண்டிய வேகமாற்றத்தின்மீதும் சார்ந்திருக்கிறது. அது இவ்விரண்டிற்கும் ஏற்ப நேராகவிருக்கும். எனவே, ஆற்றலால் பொருளில் ஏற்படும் விளைவை அதன் நிறையையும், வேகத்தையும் பெருக்கிவந்த தொகையால் குறிப்பிடுவோம். இதற்கு உந்தம் (momentum) என்று பெயர்.

ஒரு பொருளின் நிறை m என்றும், அதன் வேகம் u என்றும் கொண்டால், அப்பொருளின் உந்தம் m u ஆகும்.

உந்த அலகு

ஒரு அலகு வேகத்துடன் இயங்கும் ஒரு அலகு நிறையுள்ள பொருளின் உந்தமே உந்த - அலகு ஆகும்.

மெட்ரிக் திட்டத்தில், வினாடிக்கு ஒரு செ. மீ, வேகத்துடன் இயங்கும் ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளின் உந்தமே உந்த-அலகு ஆகும்.

12. விசையை அளத்தல் (Measurement of Force)

நியூட்டனின் இரண்டாவது விதி விசையை அளப்பதற்கு ஒரு வழி காட்டுகிறது.

இவ்விதிப்படி ஒரு பொருளில் ஏற்படும் உந்த மாறுபாட்டு விகிதம் அப்பொருளின்மீது செயல்படும் விசைக்கு ஏற்ப உள்ளது.

இதை $F=K. m. a.$ எனக் குறியீட்டு முறையில் காட்டலாம்.

இதில் F செயல்படும் விசை; m பொருளின் நிறை; a அதில் ஏற்படும் முடுக்கம்; K, என்பது ஒரு மாறிலி. இந்த மாறிலி, நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் அலகுகளுக்குத் தக்கவாறு அமையும்.

மேற்கண்ட சமன் பாட்டில், $m=1$, $a=1$ ஆகும் பொழுது $F=1$ ஆக வைத்துக்கொண்டால், $K=1$ என்று ஆகிவிடும். இதன் காரணமாக விசை அலகின் வரையறை எளிதாக அமைகிறது.

அது பின் வருமாறு ;

''ஒரு அலகு நிறைகொண்ட பொருளிலே ஒரு அலகு முடுக்கத்தை யூட்ட வல்லது ஒரு அலகு விசையாகும்''.

ஒரு டைன் (Dyne)

மெட்ரிக் திட்டத்திலே, ஒரு கிராம் நிறைகொண்ட பொருளில் ஒரு விநாடியிலே, விநாடிக்கு ஒரு சென்டிமீட்டர் முடுக்கத்தை யூட்ட வல்லது ஒரு அலகு-விசையாகும். இவ்விசைக்கு ஒரு 'டைன்' (Dyne) என்று பெயர்.

ஒரு கிராம் நிறையுள்ள பொருளின்மீது ஒரு டைன் கொண்ட விசை செயல் பட்டால் (உந்தும்பொழுது), முடுக்கம் ஒரு சென்டி மீட்டர்/விஞடி^{2} உண்டாகும்.

ஒரு பவுண்டல் (Poundal)

பிரிட்டிஷ் திட்டத்தின்படி ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளில் ஒரு விஞடியிலே விஞடிக்கு ஒரு அடி முடுக்கத்தை யூட்டவல்லது ஒரு அலகு விசையாகும். இவ்விசைக்கு ஒரு பவுண்டல் என்று பெயர்.

(அ-து) ஒரு பவுண்டு நிறையுள்ள பொருளின் மீது ஒரு பவுண்டல் கொண்ட விசை செயல்பட்டால், அதன் முடுக்கம் ஒரு அடி/விஞடி ^{2} உண்டாகும்.

தனியலகுகள் : ஈர்ப்பலகுகள் (Absolute units; gravitational units)

நாம் மேலே கண்ட அலகுகளிரண்டும் **தனி அலகுகள் எனப்படும்.**

இவை தவிர, ஈர்ப்பு அலகுகள் என்ற மற்ருெரு வகை அலகுகள் உண்டு.

அவை வருமாறு : அந்தரத்தில் தன் வயமாக விடப்பட்ட ஒவ்வொரு பொருளும் g என்னும் முடுக்கத்தோடு கீழிறங்குமென்பதைப் பரிசோதனை வாயிலாக நாமறிவோம். இதற்குக் காரணம், பூமியினுல் அப்பொருளின்மீது தொழிற்படும் கவர்ச்சிவிசையே யாகும்.

ஒரு அலகு நிறையிலே, இவ்விசை g அலகுகள் முடுக்கத்தை உண்டாக்குவதால்,

ஒரு ஈர்ப்பு அலகுவிசை = g தனிஅலகு விசைக்குச் சமமாகும்.

மெட்ரிக் திட்டத்தில், ஒரு ஈர்ப்பு அலகு, **ஒரு கிராம் - எடை** (gram-weight) ஆகும்.

(அ-து) ஒரு கிராம் நிறை தடையின்றித் தொங்கும்போது, அதைச் (ரியாகத் தாங்குவதற்குப் போதிய விசையே ஒரு கிராம் எடையாகும்.

இத்திட்டத்தில், g = 981 செ. மீ/ விஞடி ^{2} ஆதலால்,

1 கிராம் எடை = 981 டைன் ஆகும்.

பிரிட்டிஷ் திட்டத்தில், இவ்வலகிற்கு ஒரு **பவுண்டு எடை** (pound weight) என்று பெயர்.

(அ-து) ஒரு பவுண்டு நிறை தடையின்றித் தொங்கும்போது, அதைச் சரியாகத் தாங்குவதற்குப் போதிய விசையே ஒருபவுண்டு எடையாகும்.

இத்திட்டத்தில், $g = 32$ அடி/ விநுடி^{2} ஆதலால்,

1 பவுண்டு எடை = 32 பவுண்டல் ஆகும்.

13. நிலையியலில் விசையின் அலகு

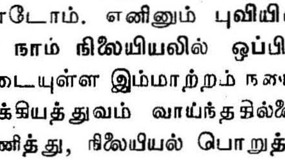
நிலையியலில் விசையின் அலகாக ஒருகிராம் எடை அல்லது ஒரு பவுண்டு எடையைக் கொள்வோம்.

ஒரு கிராமினது எடை, புவியின் வெவ்வேறு இடங்களில் ஒரே பெறுமான முடையதாயிராது என்று கண்டோம். எனினும் **புவியின் வேறுவேறு புள்ளிகளிலுள்ள விசைகளை நாம் நிலையியலில் ஒப்பிட வேண்டியதில்லை.** ஆகவே, ஒரு கிராம் எடையுள்ள இம்மாற்றம் நடைமுறையில், நிலையியல், பொறுத்தவரை முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததல்லை. இதன்காரணமாக, இம்மாறுதலைப் புறக்கணித்து, நிலையியல் பொறுத்தவரை ஒருகிராம் எடை மாறாதெனக் கொள்வேம்.

நிலையியலில், 'ஒரு கிராம் எடை' என்னும் சொற்றொடர் 'ஒருகிராம்' என்று நடைமுறையில் சுருக்கப்படும். எனவே, '10 கிராம்விசை' என்பதன் கருத்து, '10 கிராம் எடைக்குச் சமமான ஒருவிசை' எனக் கொள்ளவேண்டும்.

14. விசைகள் நேர்கோடுகளாற் குறிக்கப்படும்

ஒருவிசையினுடைய (1) அளவையும் (2) திசையையும் (3) அதன் செயல்படும் புள்ளியையும் (அ-து) ஒரு பொருளில் அவ்விசை தாக்கும் புள்ளியையும் நாமறிந்தால், அவ்விசை முற்றிலும் அறியப்படும்.



படம்-1

'எனவே, ஒருவிசையை அதன் செயல்படும் புள்ளி வழியே வரையும் ஒரு நேர்கோட்டினாலே நாம் இசைவாகக் குறிக்கலாம். அதற்குக்காரணம் ஒரு நேர்கோட்டிற்கு அளவு, திசை என்னும் இரண்டும் உண்டு.

இவ்வண்ணமாக, O A என்னும் நேர்கோடு, O- இல் தாக்குகின்ற 10 கிராம் எடைக்குச் சமனான ஒரு விசையைக் குறிக்கின்றதெனக் கொள்க. B ஆனது O A யின் மையப்புள்ளி ஆனால், அதே திசையில் தாக்குகின்ற 5 கிராம் எடையுள்ள விசை O B ஆல் குறிக்கப்படும்.

20 கிராம் எடைக்குச் சமனான ஒருவிசை OA = AC ஆக OA ஐ நீட்ட உண்டாகும் OC என்பதாற் குறிக்கப்படும்.

ஓரம்புக்குறி ஒருவிசை தொழில்படும் திசையைக் குறிப்பதற்குப் பெரும்பான்மையாக வழங்கப்படும்.

15. விசையினங்கள்

ஒருவிசை, ஒரு பொருளின்மேல் தொழிற்படும்போது அது மூன்று வேறு வடிவங்களிலே தோன்றலாம்.

அவை (i) **கவர்ச்சி** (Attraction), (ii) **இழுவிசை** (Tension), (iii) **அமுக்கம்** (Thrust), (iv) **எதிர்விசைத்தாக்கம்** (Reaction), (v) **உராய்வு** (Friction) என்னும் இனங்களாகும்.

(i) கவர்ச்சி

கவர்ச்சி என்பது புலனாகத்தக்க யாதானுமொரு கருவியினது இடையீடின்றியும், பொருள்கள் ஒன்றை யொன்று தொடவேண்டும் என்னும் நியதியின்றியும் ஒருபொருள் மற்றொரு பொருளின்மீது உஞற்றும் விசையாகும்.

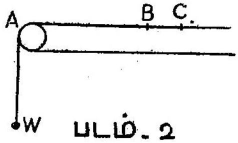
இதுபற்றி, இந்நூலிலுள்ள ஒரே உதாரணம் எப்பொருட்கும் புவிக்குள்ள கவர்ச்சியாகும். இக்கவர்ச்சி அப்பொருளின் எடையெனப்படும்.

(ii) இழுவிசை (Tension)

ஓரிழையின் ஒருமுனையை ஒரு பொருளின் யாதானுமொரு புள்ளியிற் கட்டி, அவ்விழையின் மற்றை முனையில் இழுத்தால், நாம் அப்பொருளின் மீது ஒரு விசையை உஞற்றுகின்றோம்; அத்தகைய விசை ஓரிழுவிசை எனப்படும்.

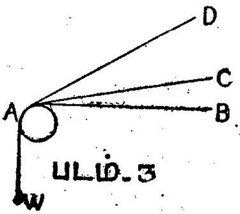
அவ்விழை இலேசாயிருந்தால் (அஃது அதனுடைய எடை புறக்கணிக்கத்தக்க அளவிற்குச் சிறிதாயிருந்தால்) அவ்விழையால் உஞற்றப்பட்ட விசை அதன் நீளம் முழுவதும் ஒரே சமனாய் இருக்கும்.

உதாரணமாக, ஒரு எடை W என்பதை ஒரு மேஜையின் வழவழப்பான ஓரத்தின் மேலாகச் செல்லும் ஓரிலேசான இழை தாங்கி நின்றால், அவ்விழையில் விசை பிரயோகப்படும் புள்ளி A, B, C, என்பவற்றுள் யாதாயிருந்தாலும், அவ்விழைக்கு ஒரே விசையையே பிரயோகிக்கப்படவேண்டுமெனக் காணப்படுகின்றது.



படம்-2

இனி, A இல் அந்த எடையைத் தாங்கவேண்டிய விசை ஒவ்வொரு வகையிலும் ஒரேயளவினதாகும். எனவே, அவ்விழையில் இழுவிசை பிரயோகிக்கப்பட்ட புள்ளியாதாயிருந்தாலும் A இலுள்ள விளைவு ஒரேயளவினதென்பதாகும். ஆகையால், அவ்விழையின் இழுவிசையும் அதன் நீளமுழுவதிலும் ஒரே அளவினதாகும் என்பது தெளிவு. மேலும், அந்த எடை W என்பது ஒரு வழவழப்பான ஒரு முளை (peg) A என்பதைச் சுற்றிச்செல்லும் ஓரிலேசான இழையினாலே தாங்கப்பட்டால் அவ்விழை இழுக்கப்படுந்திசை (AB, AC அல்லது AD) யாதாயிருந்தாலும் மற்றை முனையில் ஒரேவிசை உஞற்றப்படல் வேண்டும் என்றும், இவ்விசையின் எடை W க்குச்சமனாகு மென்றும் காணப்படும். (இவ்விசைகள் அவ்விழையின் கட்டில்லா முனையை ஒரு வில்தராசுக்குச் சேர்க்கப்பட்டால் அளக்கப்படலாம்)



படம்-3

எனவே, **வழவழப்பான முளையைச்சுற்றிச் செல்லும் ஒரு இலேசான இழையின் இழுவிசை அதன் நீளம் முழுவதிலும் ஒரே அளவுடையதாயிருக்கும்.**

குறிப்பு 1.

ஓரிழையின் இழுவிசை அதன் நீளத்திற்கு விகித சமமாகாதென்பதை மிக்க கவனத்தோடு குறித்தல் வேண்டும். கூடுதலான நீளமுள்ள இழைக்குக் கூடுதலான இழுவிசை இல்லை.

குறிப்பு 2.

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட இழைகள் ஒன்று சேர்ந்து முடியப்பட்டால், ஒவ்வோரிழையிலும் இழுவிசைகள் ஒரேயளவினதாக இருக்கவேண்டியதில்லை.

(iii) அழுக்கம் (Thrust)

ஒரு இலேசான கோல் A,B என்னும் இரு துகள்களைச் சேர்த்தால், அக்கோல் Aயிலும், Bயிலும் உஞற்றும்விசை சமமானதாகும். இவ்விசை, 'அமுக்கம்' எனப்படும்.

(iv) எதிர்விசைத்தாக்கம் (Reaction)

நாம் கையினால் மேஜையை அழுத்தினால், மேஜை நமது கையை மேனோக்கி அழுத்துகிறது. ஒரு பொருள் வேறொரு பொருளின்மீது சாய்ந்தால், அல்லது அழுத்தப்பட்டால், ஒவ்வொரு பொருளுந்தொடு புள்ளியில் ஒரு விசையை அனுபவிக்கும்; அத்தகைய விசை எதிர் விசைத்தாக்கம் எனப்படும்.

ஒரு பொருள் இரண்டாம் பொருளின்மீது உஞற்றுகின்ற விசை அல்லது தாக்கம் இரண்டாம் பொருளானது முதலாம் பொருளின்மீது உஞற்றுகின்ற எதிர்விசைக்கு அல்லது எதிர்விசைத்தாக்கத்திற்குச் சமமாகும். இதையே நியூட்டனின் மூன்றாவது இயக்கவிதி கூறுகிறது.

உதாரணம் :

ஓரேணி ஒரு சுவருக்கெதிராகச் சாய்ந்தால், அச்சுவர்மீது அவ் வேணியின் நுனியால் உஞற்றப்படும் விசை, அச்சுவரால் அவ்வேணி நுனியில் உஞற்றப்படும் விசைக்குச் சமனும் எதிருமாயிருக்கும்.

(v) உராய்வு (Friction)

வழவழப்பாய் மினுக்கப்பட்ட ஒருதள முகத்தையுடைய ஒரு மரத்துண்டைக் கூடியவளவு வழவழப்பான ஒருமேசைமீது வைத்து அத்துண்டை அம்மேசையின் மேற்பரப்பின்மீது இயக்கத் தொடங்கினால் கொஞ்சம் தடை ஏற்படுவதைக் காணலாம், அம்மரத்திற்கும், அம்மேசையின் மேற்பரப்பிற்கும் இடையே ஒருவிசை எத்துணைச் சிறிதாயினும் எப்பொழுதும் உண்டு.

ஒன்றையொன்று தொடும் பொருள்களுக்கிடையே ஒரு பொருளின் மீது மற்றொருபொருள் வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு யாதோ ஒரு விசை எப்பொழுதும் உண்டு. அத்தகைய விசை உராய்வு விசை எனப்படும்.

வரையறை

இருபொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால் ஒரு பொருளானது மற்றையதன் மீது வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு அவற்றினுடைய தொடுபுள்ளியில் உஞற்றப்படும் விசைக்குக் காரண

மாயுள்ள அவ்விருபொருள்களினுடைய பண்பு உராய்வு எனப்படும். அன்றியும், உஞற்றப்பட்ட விசை உராய்வுவிசை எனப்படும்.

எதிர்விசையும் உராய்வுவிசையும்

இருபொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், ஒரு பொருள் மற்றொன்றைத் தொடுபுள்ளியில் அழுத்துகின்றது, இவ் வழுத்தத்திற்கு இரு பிரிவுகள் இருக்கலாம். அவற்றில் ஒன்று அவை களின் பொதுச் செங்குத்துவழியாகவும் மற்றொன்று அவைகளின் பொதுத் தொடுகோட்டு வழியாகவும் செயல்படலாம் இதில் முதல் பிரிவு செங்குத்து எதிர்விசை அல்லது எதிர்விசை எனக் கூறப்படும். பொதுத்தொடுகோடுவழியாகச் செயல்படும் இரண்டாவதுபிரிவு, உராய்வு விசை எனப்படும். இரண்டாவது கூறப்பட்ட இந்த உராய்வு விசையே ஒரு பொருள் மற்றொரு பொருள் மீது வழுக்குதலைத் தடுக்கின்றது. இந்த இரண்டாம் பிரிவு, பொருள்கள் வழவழப்பற்றனவாய் (Rough) இருக்கும்பொழுதே தோன்றும்.

ஆனல், அப்பொருள்கள் முற்றிலும் வழவழப்பானவையாக இருப்பின், அவைகளின் தொடுகோட்டுத் திசையில் ஒரு விசையும் இருக்காது. அவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒரே விசை அவைகளின் பொதுச் செங்குத்துக்கோட்டுவழிச் செயல்படும்.

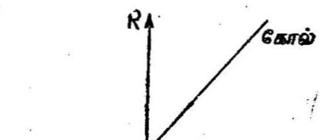
வரையறை

ஒன்றையொன்று தொடும் இரு பொருள்களானவை முற்றிலும் வழவழப்பானவையாயின், அவற்றிற்கு இடையே உள்ள விசை அல்லது எதிர்விசைத்தாக்கம் அத்தொடு புள்ளியில் அவற்றின் பொது மேற் பரப்பிற்குச் செங்குத்தாகும்.

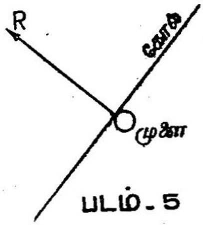
உதாரணம்

(i) ஒரு கோலினது ஒரு நுனி ஒரு வழவழப்பான சமதளத்தின் மேல் தாங்கப்பெற்று அமைந்திருந்தால், அப்புள்ளியில் ஏற்படும் எதிர் விசைத்தாக்கம் அச்சமதளத்திற்குச் செங்குத்தாக அக்கோலின் தொடு புள்ளி வழியே செயல்படும்.

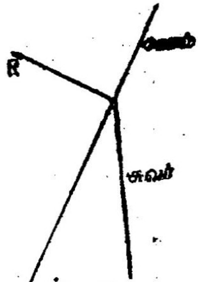
(ii) ஒரு கோல் ஒரு வழவழப் பான முனைமீதோ அல்லது வழவழப் பான சுவர்மீதோ செல்லும்போது எதிர்விசைத்தாக்கம் கோலுக்குச் செங் குத்தாகச் செயல்படும்.



படம் - 4

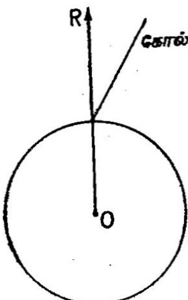


படம்-5

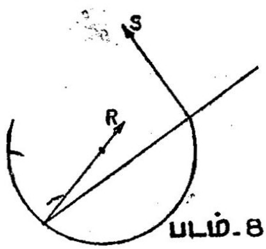


படம்-6

(iii) ஒரு துகளோ அல்லது ஒரு கோலின் ஒரு நுனியோ ஒரு வழ வழப்பான கோளத்தின் வளைவு பரப்பின்மீதோ அல்லது வழவழப்பான வட்டவடிவமான வில்லின்மீதோ அமைந்திருந்தால், அதனுல் ஏற்படும் எதிர்விசைத்தாக்கம் கோளத்திற்கோ அல்லது வட்டத்திற்கோ செங்குத்தாகி, அதன் மையப்புள்ளி. வழியே செல்கிறது.



படம்-7



படம்-8

16. சமநிலை (Equilibrium)

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட விசைகள் ஒரு பொருளின் மீது தாக்கும்பொழுது, அப்பொருள் ஒய்விலிருக்கும் வண்ணம் அவை அமைந்தால், அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றன எனப்படும்.

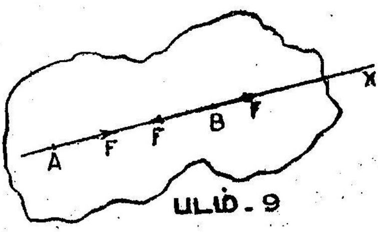
17. சமனும் எதிருமாயுள்ள விசைகளை உள்இடுதலும் நீக்கலும்

ஒருகட்டிறுக்கப்பொருளின் யாதானுமொரு புள்ளியிற் சமனுமெதிருமாயுள்ள விசைகள் இரண்டைப் பிரயோகித்தால், அப்பொருளின் சம

நிலையில் அவற்ருல் யாதுமொரு விளைவும் இல்லை எனக் கொள்வோம். இதுபோல, ஒரு பொருளின் யாதானுமொரு புள்ளியிலே இரண்டு சமனு மெதிருமாயுள்ள விசைகள் தொழிற் பட்டால், அவைகள் நீக்கப் படலாம்.

18. விசை ஊடிணைப்புத் தத்துவம் (Principle of ransmissibility of force)

ஒருவிசை ஒரு கட்டிறுக்கப்பொருளின் யாதானுமொரு புள்ளியிலே தாக்கினுல், அது, தான் செயல்படும் கோட்டில் அப்பொருளோடு கட்டிறுதியாக இணைக்கப்பட்ட வேறு ஏதாவது புள்ளியில் தாக்குகின்ற தெனக் கொள்ளப்படலாம்.



படம் - 9

F என்ற விசை, ஒருபொருளில் A என்ற புள்ளியில் AX திசையில் செயல் படுவதாகுக. AXல் ஏதாவது ஒரு புள்ளி B என்பதை எடுத்து அப் புள்ளியில் ஒவ்வொன்றும் F க்குச் சமனுக BA,BX திசைகளிலே தாக்குகின்ற சமனுமெதிருமாயுள்ள இரு விசைகளை உள் இடுக. இவை அப்பொருளின் சமநிலையில் ஒருவிளைவும் உண்டுபண்ணமாட்டா. A என்ற புள்ளியில் AB திசையில் செயல்படும் F என்னும் விசையும், B என்னும் புள்ளியில் BA திசையில் செயல்படும் F என்னும் விசையும் ஒன்றுக்கொன்று சமனுமெதிரு மானவை. அவை, ஒன்றை யொன்று சரிக்கட்டுவதால், நீக்கப்படலாம்.

இவ்வண்ணமாக, B என்னும் புள்ளியில், BX என்ற திசையில் செயல்படும் F என்னும் விசையே மீந்துள்ளது. அதன் விளைவு A என்ற புள்ளியில் முந்தியவிசை F இனுடைய விளைவிற்குச் சமம்.

குறிப்பு :

விசை F ஆனது A யிலோ B யிலோ பிரயோகப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்வதற்கேற்ப மேலுள்ள பொருளின் உள்விசைகள் வேறு வேருகும். எனினும், இந்நூலில் உள்விசைகளைப் பற்றி நாம் கருதவில்லை.

19. திசையிகளும் திசையிலிகளும் (Vectors and scalars)

நாம் எடுத்துக்கொள்ளும் இராசிகளில், பெயர்ச்சி, திசைவேகம் போன்றவைகள் அளவையே யன்றி, திசையையும் கொண்டுள்ளன.

இவை திசையுற்ற இராசிகள் அல்லது 'திசையி'கள் (Vectors) எனப்படும். முடுக்கம், விசையாகிய இராசிகளும் திசையிகளேயாகும்.

இம்மாதிரியான 'திசையி' O,P என்ற இரண்டு புள்ளிகளால் நிர்ணயிக்கப்படுகிறது. திசையியின் அளவை OPன் நீளத்தால் அளக்கப்படுகின்றது. அதன் திசை Oயிலிருந்து Pக்குள்ள திசையாகும். இத் 'திசையி'யை $\vec{OP}$ எனக் குறிக்கிறோம்,

திசையுட்கொள்ளாத இராசிகள் திசையற்ற இராசிகள் அல்லது 'திசையிலிகள்'(scalar quantities) எனப்படும். வேகம், நிறை, உஷ்ணநிலை இவையெல்லாம் திசையற்ற (scalar) இராசிகளாகும் (அ–து) திசையிலிகளாகும்.

2. விசைகளுடைய சேர்க்கையும் பிரிப்பும்

(Composition and Resolution of forces)

1. ஒரு பொருள்மீது பல்வேறு விசைகள் செயல்பட்டால், அதன் பயனாய் அப்பொருள் ஏதேனு மொரு திசையில் இயக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு பல்வேறு சக்திகள் ஏக காலத்தில் செயற்படுவதால் உண்டாகும் பயனைத் தான்மட்டும் தனியாகத் செயற்படுவதால் உண்டாக்கக் கூடிய ஒரு விசையை அப்பல்வேறு விசைகளின் விளைவு என்பார்கள். மேலும், அப்பல்வேறு விசைகளும், அவ்விளைவுவிசையின் பிரிவுகள் ஆகும்.

விளைவு

வரையறை (Resultant)

இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட P, Q, S,......என்ற விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்க, இவ்விசைகளுடைய விளைவிற்குச் சமனான ஒரு விளைவைத் தரத்தக்க ஒரு தனி விசை R என்பது காணப்படுமாயின், இத்தனி விசை R என்பது ஏனைய விசைகளின் (Resultant) விளைவென்றும், P, Q, S......என்னும் விசைகள் R இன் கூறுகள் என்றுங் கூறப்படும்.

விசை R இற்குச் சமனுமெதிருமாயுள்ள ஒரு விசை அப்பொருள் மீது பிரயோகிக்கப்பட்டால், அப்பொருள் சமநிலையை எய்தும். இவ்வாறு கூட்டப்பட்ட விசையே முன்னுல்கூறிய பல்வேறு விசைகளின் 'சமனி' (Equilibrant) எனப்படும்,

ஆகையால், பல்வேறு விசைகளின் 'சமனி' என்பது அவற்றின் விளைவுக்குச் சமமான ஆனுல் எதிரான தொருவிசையாகும்,

மறுதலையாக, ஒரு பொருளின்மீது தாக்கும் விசைகள் சமநிலை எய்தினுல், அவற்றுள் யாதாயினும் ஒன்று ஏனையவற்றின் 'சமனி' யாகும், (அ-து) ஏனையவற்றின் விளைவிற்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கும்.

2. ஒரு நேர்கோட்டிலே செயல்படும் விசைகளின் விளைவு

இரு விசைகள் ஒரு பொருளின்மீது ஒரே திசையில் செயல்பட்டால், அவற்றின் விளைவு அவற்றின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமன் என்பது தெளிவு. இவ்வாறாக 4 கிராம், 7 கிராம் என்னும் எடைகளுக்குச் சமமாய் ஒரே திசையில் தாக்குகின்ற இருவிசைகள், அதே திசையில் தாக்குகின்ற 11 கிராம் எடை விசைக்குச் சமம்.

இரு விசைகள் ஒரு பொருளின்மீது எதிர்திசைகளிலே செயல் பட்டால், அவற்றின் விளைவு அவற்றின் வித்தியாசத்திற்குச் சமனாய்ப் பெரியதன் திசையில் செயல்படும். இவ்வண்ணமாக 9 கிராம், 4 கிராம் என்னும் எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் எதிர்திசைகளிலே தாக்கினால் அவை முதலாவதன் திசையிலே தாக்குகின்ற 5 கிராம் எடை விசைக்குச் சமமாகும்.

பல்வேறு விசைகள் ஒரு துகளின்மீது ஒரே நேர்கோட்டில் செயல்பட்டால், அவற்றுள் ஒரு திசையில் செயல்படுபவனவற்றை மிகைக் குறியுடனும், எதிர்திசையில் செயல்படுவனவற்றைக் குறைக் குறியுடனும் கொள்ளலாம். இப்போது, இப்பல்வேறு சக்திகளின் விளைவு அவற்றின் குறியுடன் கூடிய தொகையேயாகும். உதாரணமாக, P, Q, R, S, T என்னும் விசைகள் ஒரே துகளின்மீது ஒரே நேர்கோட்டில் செயல்படுகையில், P, R, T என்பன ஒரு திசையிலும், Q, S, எதிர்திசையிலும் இருந்தால், அவற்றின் விளைவு (P+R+T−Q−S) ஆகும்.

பயிற்சி 2·1

(1) ஓரிழையானது ஓர் அறையின் உட்கூரையிலிருந்து தொங்க விடப்பட்டு, ஒவ்வொன்றும் 4 இரா. எடையுள்ள மூன்று எடைகளுள் ஒன்றைத் தன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலும், ஏனையவற்றுள் ஒவ்வொன்றையுந் தன்னுடைய முனைகளிலிருந்து சம தூரங்களிலுந் தாங்கி நிற்கின்றது. பிரிக்கப்பட்ட அவ்விழைப் பகுதிகளுடைய இழுவிசைகளைக் காண்க.

(2) முனைகளில் 10 இரா. 16 இரா என்னும் எடைகள் இணைக்கப் பட்ட ஒரு பாரமான சங்கிலி அழுத்தமான ஒரு கப்பியின்மீது சமநிலையில் தொங்குகிறது. அச்சங்கிலியின் மிகப் பெரிய இழுவிசை 20 இரா. எடையாயின், அச்சங்கிலியினது எடையைக் காண்க.

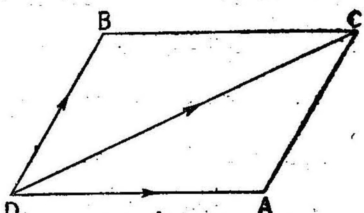
(3) 8 அடி 9 அங்குல நீளமும், 15 இரு. எடையுமுடைய ஒரு பாரமான சங்கிலி தன் முனையொன்றில் 7 இரு. எடை இணைக்கப் பட்டு ஒரு வழவழப்பான முளையாணியின்மீது சமநிலையில் தொங்கு கின்றது. அச்சங்கிலியின் எவ்வளவு நீளம் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் இருக்கின்றது ?

3. இரு விசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது வெவ்வேறு திசைகளிலே தாக்கினால், அவற்றின் விளைவு பின்வரும் **விசை இணைகர விதி** (Parallelogram law of forces) யால் காணலாம்.

தேற்றம் : விசை இணைகரம்

ஒரு புள்ளியிலே செயல்படும் இரு விசைகள் ஓரிணைகரத்தின் கோணப்புள்ளி ஒன்றின் வழியாக வரையப்படும் இரு பக்கங்களாலே அளவு, திசைகள் பற்றிக் குறிக்கப்பட்டால், அவற்றின் விளைவு அக்கோணப்புள்ளி வழியாகச் செல்லும் அவ்விணைகரத்தின் மூலை விட்டத்தால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்படும்.

O என்பது ஒரு துகள் என்றும், அதன்மீது செயற்படும் இரண்டு விசைகள் OA,OB என்னும் நேர்கோடுகளால் அளவிலும், திசையிலும் குறித்திருப்பதாகக் கொள்வோம். இவ்விரண்டு விசைகளின் விளைவு காண OACB என்ற இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்து OCஐச் சேர்க்கவும். OCதான் அளவிலும், திசையிலும் விளைவுவிசையைக் குறிக்கும் என்று தேற்றம் கூறுகிறது.



படம்-10

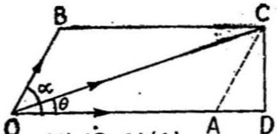
4. **ஒன்றுக்கொன்று சாய்வான இரண்டு விசைகளின் விளைவைத் திரிகோண கணிதத்தால் எளிதிற் பெறலாம்.**

OA,OB என்பன கோணம் α விலே செயற்படும் P, Q என்னும் இரு விசைகளாகுக.

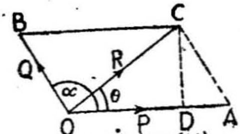
OACB என்னும் இணைகரத்தை முடிக்க.

CDஐ OA இற்கு, அல்லது வேண்டுமாயின் நீட்டிய OA இற்குச் செங்குத்தாக வரைக.

விளைவு OC இன் அளவை R எனக் குறிக்க; $\angle COD = \theta$ என்க.



படம்-11(i)



படம்-11(ii)

ACயும் OBயும் இணையாகையால், $\angle DAC = \alpha$ அல்லது $(\pi - \alpha)$ ஆகும்.

ஆயின், $OD = OA + AD$ [fig: i]

$$= OA + AC.\cos\angle DAC$$

$$= P + Q\cos\alpha$$

D என்பது இரண்டாம் படத்தில் உள்ளவாறு O,A என்பவற்றிற்கு இடையே விழுந்தால்,

$$OD = OA - AD$$

$$= OA - AC\cos\angle DAC$$

$$= P - Q\cos(\pi - \alpha)$$ cos (180 − α) = −cos α

$$= P + Q\cos\alpha$$

அன்றியும், $DC = AC.\sin DAC = Q\sin\alpha$

$$\therefore R^2 = OC^2 = OD^2 + DC^2$$

$$= (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$$

$$= P^2 + Q^2\cos^2\alpha + 2PQ\cos\alpha + Q^2\sin^2\alpha$$

$$= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$

$$\therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \quad \text{(i)}$$

அன்றியும், $\tan\angle COD = \dfrac{DC}{OD} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

(அ-து) $\tan\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ (ii)

இந்த இரு சமன்பாடுகளும் விளைவினுடைய அளவையும், திசையையும் தருகின்றன.

கி. தே. 1

அவ்விசைகள் செங்கோணத்தில் இருந்தால்,

நாம் பெறுவது $a=90^\circ$ ஆகும்

ஆயின், $R=\sqrt{P^2+Q^2}$

$$\tan\theta=\frac{Q}{P}$$

கி. தே. 2

விசைகள் ஒவ்வொன்றும் Pக்குச் சமனுயின், நாம் பெறுவன:

$$R=\sqrt{P^2(1+1+2\cos a)}=P\sqrt{2(1+\cos a)}$$

$$=P\sqrt{2.2\cos^2\frac{a}{2}}=2P\cos\frac{a}{2}$$

$$\tan\theta=\frac{P\sin a}{P+P\cos a}=\frac{2\sin a/2\cos a/2}{2\cos^2 a/2}=\tan\frac{a}{2}$$

$$\therefore\theta=\frac{a}{2}$$

ஆகவே, இரு சம விசைகளின் விளைவு அவற்றின் இடையேயுள்ள கோணத்தை இரு சமக்கூறிடும்.

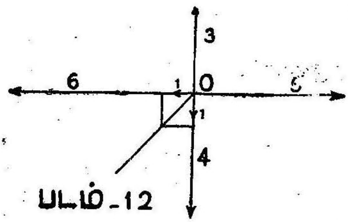
குறிப்பு—P, Q க்குச் சமமாக யிருக்கையில், இணைகரம் சாய்வு சதுரமாகின்றது. ஆகையால்,

சாய்வு சதுரத்தில் $R=2P\cos\frac{a}{2}$

மேலும், $\theta=a/2$: ஏனெனில், சாய்வு சதுரத்தில் மூலைவிட்டம் கோணத்தை இருசமக்கூறிடும்.

உதாரணம் 1

முறையே 3,4,5,6 இருத்தல் எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் ஒரு துகளின்மீது முறையே வடக்கு, தெற்கு, கிழக்கு, மேற்கு என்னுந் திசைகளிலே தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவின் அளவையும் திசையையும் காண்க:



படம்-12

வடக்கே 3 இரு. எடை, தெற்கே 4 இரு. எடை என்ற விசைகளின் விளைவு தெற்கே 1 இரு. எடை விசையாகும்.

கிழக்கே 5 இரு. எடை. மேற்கே 6 இரு. எடை என்ற விசைகளின் விளைவு மேற்கே 1 இரு. எடை விசைக்குச் சமம்.

தெற்கே 1 இரு. எடை, மேற்கே 1 இரு. எடை என்ற விசைகளின் விளைவு, R எனின்,

$$R=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \text{ இரு. எடை.}$$

மேலும், இருவிசைகளும் சமமாதலால் அவைகளின் விளைவு இரு விசைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தை இருசமக்கூறிடும்.

ஆகவே, எல்லா விசைகளின் விளைவு $=\sqrt{2}$ இரு. (i)

அவ்விளைவு தென்மேற்குத் திசையில் செயல்படும். (ii)

உதாரணம் 2

P,Q என்னும் இரு விசைகளின் விளைவு R; Q இரட்டிக்கப்படின், R என்பது இரட்டிக்கப்படும். Q முன்பின்னாக்கப்பட்டால் R என்பது மீண்டும் இரட்டிக்கும் எனின், $P:Q:R::\sqrt{2}:\sqrt{3}:\sqrt{2}$ எனக் காட்டுக.

P, Q என்னும் விசைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் θ என்க.

எனின், $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$ (i)

Q இரட்டிக்கப்படின், R இரட்டிக்கின்றது

$\therefore (2R)^2=P^2+(2Q)^2+2P.2Q\cos\theta$

(அ-து) $4R^2=P^2+4Q^2+4PQ\cos\theta$ (ii)

Q இன் இயக்க திசை நேர்மாறாக்கப்பட்டால், அப்பொழுதும் R இரட்டிக்கின்றது

எனவே, $(2R)^2=P^2+(-Q)^2+2.P(-Q)\cos\theta$ *

(அ-து) $4R^2=P^2+Q^2-2PQ\cos\theta$ (iii)

(ii)−(i)×2→ $2R^2=2Q^2-P^2$ (iV)

$(ii)+(iii)\times 2 \rightarrow 12R^2=3P^2+6Q^2$

(அ-து) $4R^2=2Q^2+P^2$ (V)

இப்பொழுது, $(iv)+(v)\rightarrow 6R^2=4Q^2$ (அ-து) $3R^2=2Q^2$

மேலும், $(iv)-(v)\rightarrow -2R^2=-2P^2$ (அ-து) $R^2=P^2$

$$\therefore \frac{P^2}{2}=\frac{Q^2}{3}=\frac{R^2}{2}$$

(அ-து) $P: Q: R = \sqrt{2}: \sqrt{3}: \sqrt{2}$

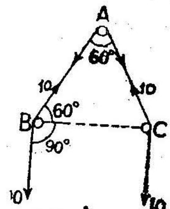
[* குறிப்பு:- Q நேர்மாறுக்கப்பட்டால், விசை — Q என்றும் விசைகளின் இடைக்கோணம் θ என்றும் கொண்டுள்ளோம்.

மாறாக, விசை Q என்றும், இடைக்கோணம் $(180-\theta)$ என்றும் கொள்ளலாம்]

உதாரணம் 3

ஒரு சுவரில் சமபக்க முக்கோணவடிவில் அமைக்கப்பட்டுள்ள மூன்று வழவழப்பான முளைகள் மேல் செல்லும் ஓர் இலேசான இழையின் ஒவ்வொரு முனையிலும் 10 இரு. எடை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. முக்கோணத்தின் அடியானது கிடைப்போக்கில் இருந்தால் ஒவ்வொரு முளையின் மீதுள்ள அழுத்தம் யாது?

A,B,C என்பன முளைகளின் நிலைகளாகட்டும்.



படம்-13

முளைகளெல்லாம் வழவழப்பானவைகளாதலின், அந்த இலேசான இழையின் நீளம் முழுவதிலும் இழுவிசை ஒரே அளவுடைதாயும் 10 இரு. எடைக்குச் சமமாகவும் இருக்கும்.

Aஇல் ஒவ்வொன்றும் 10 இரு. எடையுள்ள இரு இழுவிசைகள் ஒன்றுக்கொன்று 60°இல் செயல்படுகின்றன, இவற்றின் விளைவே Aஇன் மீதுள்ள அழுத்தமாகும். இதன் அளவு R எனில்,

$$R=2P\cos\frac{a}{2}=2\times 10\times\cos\frac{60^\circ}{2}$$

$$=2\times 10\times\cos 30^\circ=2\times 10\times\frac{3}{2}$$

$$=10\sqrt{3} \text{ இரு. எடை}$$

B அல்லது Cஇல் 10 இரு. எடையுள்ள இரு இழுவிசைகள் ஒன்றுக்கொன்று 150° இல் செயல்படுகின்றன. இவ்விரு விசைகளின் விளைவே B அல்லது Cயில் உள்ள அழுத்தத்தின் அளவாகும்.

இந்த விளைவு S எனக் குறிப்பிடப்பட்டால்,

$$S^2=10^2+10^2+2.10^2 \cos 150°$$

$$=200-200\frac{\sqrt{3}}{2}=26.8$$

$$\therefore S=5.176 \text{ இரு. எடை}$$

ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் செயல்படும் விசைகள் சம அளவுடையனவாய் இருப்பதால், அவைகளின் விளைவின் திசை முளைகளின் இருபக்கங்களிலுள்ள இழைகளின் பகுதிகளுக்குள்ளடங்கிய கோணத்தை இரு சமக்கூறிடும்.

பயிற்சி 2·2

1. 12 இரு. 7 இரு. என்னும் எடைகளை முறையே தமது அளவுகளாகக் கொண்ட இரு விசைகளுடைய மிகப் பெரிய விளைவையும், மிகச் சிறிய விளைவையும் காண்க.

2. தரப்பட்ட இரு விசைகள் ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்றன. மற்றொரு தரப்பட்ட அளவுடைய மூன்றும் விசை எத்திசையில் அத்துகளைத் தாக்கினுல், அம்மூன்றினுடைய விளைவு கூடியவளவு பெரிதாகுமெனக் காண்க.

3. பின்வரும் உதாரணங்களில், P,Q என்பன, கோணம் a விலே தாக்குகின்ற இரண்டு விசைகளையும், R என்பது அவற்றின் விளைவையுங் குறிக்கின்றன.

(i) $P=7$; $Q=8$; $a=60°$ ஆயின், R என்பதைக் காண்க.

(ii) $P=9$; $Q=5$; $a=120°$ ஆயின், R என்பதைக் காண்க.

(iii) $P=24$; $Q=7$; $a=90°$ ஆயின், R என்பதைக் காண்க.

(iv) $P=187$; $Q=84$; $a=90°$ ஆயின், R என்பதைக் காண்க.

(v) $P=13$; $R=14$; $a=90°$ ஆயின், Q என்பதைக் காண்க.

(vi) $P=3$; $Q=5$; $R=7$ ஆயின், a என்பதைக் காண்க.

(vii) $P=13$; $Q=14$; $a=\sin^{-1}\frac{12}{13}$ ஆயின், R என்பதைக் காண்க.

(viii) Q=5 ; R=7 ; $a=60^\circ$ ஆயின், P என்பதைக் காண்க.

(ix) P=2 ; R=$2\sqrt{3}$; $a=60^\circ$ ஆயின். Q என்பதைக் காண்க.

(x) P=13 ; Q=11 ; $\tan a=\frac{12}{5}$ ஆயின்,R என்பதைக் காண்க.

4. $P, P\sqrt{2}$ என்னும் இரு. எடையுள்ள இரு விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று 135°யிலே தாக்குகின்றன; அவற்றின் விளைவினுடைய அளவையும் திசையையும் காண்க.

5. இரு விசைகள் 120° கோணத்திலே தாக்குகின்றன, அவற்றுட் பெரியது 80 இரு. எடை. அவற்றின் விளைவுவிசை சிறிய விசைக்குச் செங்கோணமாக உள்ளது; பின்னதனைக் காண்க.

6. இரு விசைகளுள் ஒன்று மற்றொன்றின் இரு மடங்காகவும், விளைவுவிசை பெரியதற்குச் சமனாயும் இருந்தால், அவ்விசைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க

7. இரு சமவிசைகள் ஒரு துகளைத் தாக்குகின்றன; அவற்றின் விளைவின் வர்க்கம், அவற்றின் பெருக்கத்தின் மும்மடங்குக்குச் சமனாயின், அவற்றின் இடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

8. இரு விசைகள் செங்கோணத்தில் தாக்கினால், அவற்றின் விளைவு $\sqrt{10}$ இரு. எடையும், 60° கோணத்தில் தாக்கினால் அவற்றின் விளைவு $\sqrt{13}$ இரு. எடையும் இருக்கின்றனவாயின், அவ்விரு விசைகளுடைய அளவைக் காண்க.

9. P என்னும் இரு சமவிசைகளின் விளைவு (i) P இற்குச் சமனாயின் (ii) $\frac{P}{2}$ இற்குச் சமனாயின், அவற்றிடையே உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

10. P+Q, P−Q என்பனவற்றிற்குச் சமமான இரு விசைகளின் விளைவு $\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும் வண்ணம், அவ்விசைகள் என்ன கோணத்திலே தாக்க வேண்டும்?

11. இரு விசைகளின் மொத்தம் 18; அவ்விரு விசைகளுட் சிறியதற்குச் செங்குத்துத் திசையில் உள்ள விளைவு 12; அவ்விசைகளுடைய அளவுகளைக் காண்க.

12. P, Q என்னும் இரு விசைகள், அவைகளின் விளைவு R=P யாகும்வண்ணம் ஒரு கோணத்திலே தாக்குகின்றன; P ஐ இரட்டித்தால், புது விளைவு Qவிற்குச் செங்குத்தாக இருக்குமெனக் காட்டுக.

13. P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளைவு $\sqrt{3}\,Q$ என்பதற்குச் சமனுய், Pயினது திசையோடு 30° கோணத்தில் செயல்படுகிறது; P ஆனது Qவிற்குச் சமம் அல்லது அதன் இரு மடங்கு எனக் காட்டுக.

14. 2P, P என்ற இரு விசைகள் ஒரு துகளைத் தாக்குகின்றன; முதலாவதை இரட்டித்து, இரண்டாவதை 12 இரு. எடையைக் கூட்டினுல் விளைவினது திசை மாருது. P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15. θ என்னும் கோணத்திலே தாக்குகின்ற P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளைவு $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ ஆகும்; அவை $(90°-\theta)$ என்னும் கோணத்திலே தாக்கினுல், அவைகளின் விளைவு

$$=(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2} \text{ என்ருல், } \tan\theta=\frac{m-1}{m+1} \text{ எனக் காட்டுக.}$$

16. ஒரு சுவரில் இரு சமபக்க முக்கோண வடிவில் மூன்று ஆணிகள் பாய்ச்சப்படுகின்றன; முக்கோணத்தின் அடி கிடைப்போக்காகவும், உச்சிக்கோணம் 120° ஆகவும் உள்ளது; ஒவ்வொரு முனையிலும் 20 இரு. எடை இணைக்கப்பட்ட ஒரு இலேசான இழை அந்த மூன்று ஆணிகளின் மேலாகச் செல்கிறது; ஒவ்வொரு ஆணியின்மீதுள்ள அழுத்தமும், அதன் திசையையும் காண்க.

17. ஒன்றுக்கொன்று யாதானுமொரு தரப்பட்ட கோணத்திற் சாய்ந்த P, Q என்னும் இரு விசைகளின் விளைவு R என்பது Pயினது திசையொடு θ என்னும் கோணத்தை ஆக்கினுல், தரப்பட்ட அதே கோணத்தில் தாக்குகின்ற P+R, Q என்னும் விசைகளின் விளைவு, P+R என்பதின் திசையோடு $\frac{\theta}{2}$ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்குமெனக் காண்பி.

18. ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகச் செயல்படும் P_1, P_2 என்ற இரு விசைகளின் விளைவு R ஆகும். P_1, P_2 ஒவ்வொன்றும் 5 இரு. எடை மிகுதியாக்கப்பட்டால், Rஆனது 4 இரு. எடை மிகுதியாகி, தொடக்கத்திலே P_1, P_2 வின் மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமாக இப்பொழுது காணப்பட்டால், P_1, P_2வின் எடைகளைக் கண்டுபிடி.

19. ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் இரு விசைகளில், ஒன்றின் திசை நேர்மாறுக்கப்படும்பொழுது, அவற்றின் விளைவின் திசையில், ஒரு செங்கோண மளவிற்குத் திருப்பம் ஏற்பட்டால், இரு விசைகளும் சம அளவுடையனவாய் இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக.

20. P, Q என்னும் இரு விசைகள் θ கோணத்திலே தாக்குகின்றன; அவைகள் ஒன்றிற்கொன்று இடமாறிச் செயல்படும்பொழுது அவைகளுடைய விளைவின் திசையில் ஏற்படும் கோணத் திருப்பம் ϕ ஆகின், $\tan \frac{1}{2}\phi = \frac{P-Q}{P+Q} \tan \frac{1}{2}\theta$ எனக் காட்டுக.

21. ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற, மூன்று தரப்பட்ட விசைகள் சமநிலையில் உள்ளன; அவற்றுள் ஒன்று கொடுக்கப்பட்ட கோண வளவில் தன் பிரயோகப் புள்ளிபற்றித் திருப்பப்பட்டால், அம்மூன்று விசைகளின் விளைவை ஓரெளிய அமைப்பினுற் காண்க; அவ்விசையின் சாய்வு மாறிக்கொண்டிருந்தால், விளைவின் சாய்வு அதில் அரைப் பங்கு மாறுமெனக் காட்டுக.

22. கொடுக்கப்பட்ட இருவிசைகள் ஒரு பொருளினுடைய தந்த இரு புள்ளிகளிலே தாக்குகின்றன; அவை, அப்புள்ளிகளைப்பற்றி ஒரே திசையில் எவையேனும் இரு சமகோணங்களளவு திருப்பப்பட்டால் அவற்றின் விளைவு நிலையான ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் எனக் காட்டுக.

23. ஓராருவி 96 அடி அகலமுள்ளது. ஒரு படகு எதிர்கரைகளிலிருக்கும் இரு ஆட்கள் ஒவ்வொருவனுலும் 10 இரு. எடைக்குச் சமனுன விசையோடு அவ்வருவியின் நடுவாக இழுக்கப்படுகின்றது; இழுக்கப்படும் கயிறுகள் ஒவ்வொன்றும் 60 அடி நீளமுள்ளதாய் அப்படகின் ஒரு புள்ளியிலேயே தொடுக்கப்பட்டால் அப்படகின் மீதுள்ள விசையைக் காண்க.

24. ஒவ்வொன்றும் 112 இரு. எடையுள்ள இரு எடைகள் ஒரே கிடைத்தளத்திலுள்ள A, B என்னும் இரு முளையாணிகளின்மீது செல்லும் ஓரிழையாலே தொடுக்கப்படுகின்றன; 5 இரு. எடையொன்று A, B என்பவற்றிற்கிடையே அதன் மத்தியில் அவ்விழைக்கு இணைக்கப்பட்டால், A B ஆனது 10 அடி யெனக்கொண்டு, A B யின் மட்டத்திற்குக் கீழே அது இறங்கும் ஆழத்தை அங்குலத்தில் காண்க.

25. ஒரு சுவரிலே. நான்கு முளையாணிகள், ஓர் ஒழுங்கான அறுகோண மொன்றினுடைய மிக வுயர்ந்த நாலு புள்ளிகளிலே பொருந்து

மாறும்,. இதில், அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளிகள் கிடைநேர்கோட்டிலே அமையுமாறும், அறையப்பட்டுள்ளன; இவற்றின்மீது W என்னும் எடையைத் தாங்குகின்ற ஒரு தடம் எறியப்படுகின்றது; அத்தடம், மிகத் தாழ்ந்த முளையாணிகளில் தன்னால் செங்கோணங்களாக்கும்படியான நீளமுடையது; அவ்விழையின் இழுவிசையையும், அம்முளையாணிகளின்மீதுள்ள அமுக்கத்தையுங் காண்க.

26. ஒவ்வொன்றும் Fற்குச் சமமான மூன்று விசைகள் ஒரு புள்ளியில் செயல்படுகின்றன; அவற்றில் நடுவிசை மற்றை விசைகள் ஒவ்வொன்றிற்கும் 60° கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளது; அம்மூன்றின் விளைவைக் காண்க.

27. ABC என்பது, கோணம் $A=120^\circ$ ஆகவுள்ள இருசமபக்க முக்கோணம் ; 1, 1, $\sqrt{3}$ இரு. நிறை என்னும் விசைகள் AB,AC,BC என்னும் பக்கங்களின் நீளவாட்டில் தாக்குகின்றன ; அவற்றின் விளைவு BC என்பதை இரு சமக் கூறிடுகின்றதென்றும், அம்முக்கோணத்தினுடைய மற்றைப் பக்கங்களுள் ஒன்றுக்குச் சமாந்தரமாயிருக்கிறதென்றுங் காட்டுக.

28. ABCD ஒரு சதுரம்; AB, CB, AD, DC என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் P என்னுஞ் சம விசைகளானவை தாக்குகின்றன; அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

29. ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்ற ஐந்து விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றன; அவற்றுள் 4, 4, 1, 3 என்னும் இரு. எடையுள்ளவை தொடர்ச்சியாக ஒன்றோடொன்று 60°என்னுங் கோணங்களை ஆக்குகின்றன; ஐந்தாம் விசையின் அளவையும், திசையையும் காண்க.

30. நான்கு சமவிசைகள் P, Q, R, S என்பன ஒரு துகளின் மீது தாக்குகின்றன; P, Q என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணமும், Q, R என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணமும், R, S என்பனவற்றிற்கு இடையேயுள்ளதும் ஒன்றுக்கொன்று சமம்; P, S என்பனவற்றிற்கிடையே உள்ள கோணம் 108° ஆயின், அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

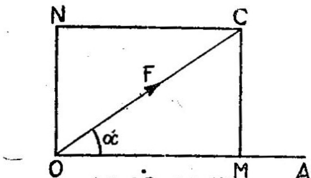
31. 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$, 2 என்னும் இரு.எடையுள்ள விசைகள் ஒழுங்கான அறுகோணமொன்றினுடைய கோணப் புள்ளிகளுள் ஒன்றில் ஏனைய ஐந்து கோணப் புள்ளிகளின் முகமாகத் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவினுடைய பருமன், திசைகளைக் காண்க.

32. F என்னும் சமவிசைகள் ஒரெண் கோணத்தின் கோணப் புள்ளியொன்றில் ஏனைக்கோணப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றின் முகமாகத் தாக்குகின்றன; அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

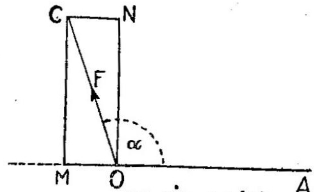
6. அளவு, திசைகளிலே தரப்பட்ட இருவிசைகளுக்கு, ஒரு விளைவே உண்டு; அதற்குக் காரணம் OA, OB (படம் பிரிவு 3 — அதிகாரம் 2) என்னும் இரு கோடுகளை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்டு ஓரிணைகரமே அமைக்கப்படலாம் என்பதாகும்.

7. கொடுக்கப்பட்ட ஒருவிசை எண்ணிலி வழிகளில் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படலாம்; அதற்குக் காரணம், OC என்பதை ஒரு மூலைவிட்டமாகக் கொண்டு எண்ணிலி யிணைகரங்கள் அமைக்கப்படலாம் என்பதும், இவ்விணைகரங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒருஜோடி அத்தகைய கூறுகளைத் தரும் என்பதுமே.

8. விசைப் பிரிப்பு வகைகளிலே மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது ஒரு விசையை ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத்திலுள்ள இரு கூறுகளாகப் பிரிப்பதேயாகும்.



படம் - 14 (i)



படம் - 14 (ii)

OC என்பதாற் குறிக்கப்படும் F என்னும் ஒரு விசையை, ஒன்று OA என்னுந் திசையிலும், மற்றையது OAயிற்குச் செங்குத்தான திசையிலும் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்க விரும்பவதாகக் கொள்க.

CM என்பதை OAயிற்குச் செங்குத்தாய் வரைந்து OMCN என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய். OM, ON என்பவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்கு OC என்னும் விசை விளைவாகும். ஆகவே, OM, ON என்பனவே வேண்டிய கூறுகளாகும்.

$\angle AOC = \alpha$, என்க

ஆயின், $OM = OC\cos\alpha = F\cos\alpha$

$ON = MC = OC\sin\alpha = F\sin\alpha$

M என்ற புள்ளி படம் (ii)இல் உள்ளதுபோல்

OAஐப் பிற்பக்கமாக நீட்டிய பகுதியில் இருந்தால்,

OA திசையில் F இன் கூறு

$$= -OM = -OC \cos COM = -OC \cos (180 - \alpha)$$
$$= -OC \times -\cos\alpha = OC \cos\alpha = F \cos\alpha$$

அன்றியும், OAயிற்குச் செங்குத்தான கூறு

$$= ON = MC = OC \sin COM = OC \sin (180 - \alpha) = F \sin\alpha$$

ஆகவே, ஒவ்வொரு வகையிலும், வேண்டிய கூறுகள்
$F \cos\alpha$, $F \sin\alpha$ என்பனவாகும்.

இவ்வண்ணமாக, கிடைக் கோட்டுடன் $60°$ கோணத்திலே தாக்குகின்ற 20 இரு. எடைக்குச் சமனான ஒரு விசையானது, ஒரு

கிடைத் திசையில் $20 \cos 60°$ ($= 20 \times$ $= 10$ இரு எடை) யிற்கும்,

ஒரு நிலைக்குத்துத் திசையில் $20 \sin 60°$ ($= 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 10 \times 1.732 = 17{\cdot}32$ இரு. எடை)யிற்கும் சமன்.

9. வரையறை : தரப்பட்ட விசையின் பிரித்த பகுதி

கொடுக்கப்பட்ட திசையில், தரப்பட்டவொரு விசையின் பிரித்த பகுதியானது, தரப்பட்ட திசைக்குச் செங்குத்தான திசையிலுள்ள ஒரு கூறுடன் தரப்பட்ட விசைக்குச் சமனுயிருக்கின்ற, தந்த திசையிலுள்ள கூருகும்.

இவ்வண்ணம், முந்திய பிரிவில், OA என்னுந் திசையில் விசை Fஇன் பிரித்த பகுதி $F\cos\alpha$ ஆகும்; அதற்குக் காரணம், இது OAவிற்குச் செங்குத்துத் திசையிலுள்ள $F \sin\alpha$ என்னும் கூறுடன் சேர்ந்து தரப்பட்ட விசை Fக்குச் சமனுகும் என்பதுவே.

கொடுக்கப்பட்ட திசையில் தரப்பட்ட வொரு விசையின் பிரித்த பகுதி, தரப்பட்ட விசையை, தரப்பட்ட விசைக்கும், கொடுக்கப்பட்ட திசைக்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தின் கோசைனுற் பெருக்குதலாற் பெறப்படும்.

10. ஒரு விசை தனது தாக்கக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தான திசையிலே ஒரு விளைவையும் செய்யமுடியாது.

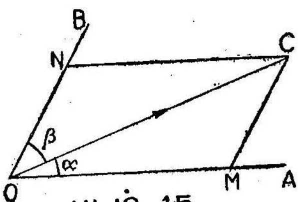
உதாரணமாக, ஓரிருப்புப்பாதை வண்டி ஓரிருப்புப்பாதையில் ஓய்விலே நின்றால், அப்பாதைகளுக்குச் செங்குத்தான திசையிலே கிடையாகத் தாக்குகின்ற யாதானுமொரு விசையினால் அப்பாதைகளின் திசையில் அதனை இயக்கமுடியாது.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு திசையிலே, தரப்பட்டவொரு விசையின் பிரித்த பகுதி அக்கொடுக்கப்பட்ட திசையில் அவ்விசையின் முழு விளைவையுங் குறிக்கின்றது.

இவ்வதிகாரம் பிரிவு 8 இல் உள்ள படத்தின்படி, விசை OC என்பது விசைகள் ON, OM என்பனவற்றாலே முற்றிலும் குறிக்கப்படுகின்றது; ஆனால், விசை ON என்பதற்குத் திசை OM இல் ஒரு விளைவும் இல்லை; எனவே, திசை OAயில் விசை Fஇன் முழு விளைவும் OM ஆல், அதாவது திசை OAயிலுள்ள அவ்விசையின் பிரித்த பகுதியாற் குறிக்கப்படுகின்றது.

11. ஒரு விசையானது எவையேனும் இரண்டு குறித்த திசைகளில் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படலாம்.

OC யினாற் குறிக்கப்பட்ட Fஎன்னும் ஒரு விசையினுடைய கூறுகள் OA, OB என்னுந் திசைகளில் வேண்டியனவாகுக.



படம்-15

கோணங்கள் AOC, COB என்பன முறையே α, β என்பனவாகுக.

OB யிற்கு இணையாய் CM என்பதை வரை; அது OA ஐ Mஇல் சந்திக்கட்டும்; OMCN என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்க.

ஆயின், OM, ON என்பனவே வேண்டிய கூறுகளாகும்.

MC, ON என்பன இணையாகையால், நாம் பெறுவது

$$\angle OCM=\beta; \text{ அன்றியும் } \angle OMC=180^\circ-(\alpha+\beta)$$

முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் எதிர்கோணங்களுடைய சைன்களுக்கு விகித சமமாகையால், நாம் பெறுவது

$$\frac{OM}{\sin MCO}=\frac{MC}{\sin MOC}=\frac{OC}{\sin OMC}$$

$$\therefore \frac{OM}{\sin\beta} = \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin(\alpha+\beta)}$$

எனவே, வேண்டிய கூறுகள்: $\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

குறிப்பு : குறித்த இரு திசைகளில் ஒரு விசையினுடைய கூறுகள் இத்திசைகளிலுள்ள அவ்விசையினுடைய பிரித்த பகுதிகள் ஆகா என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும். உதாரணமாக, திசை OA யில், Fஇன் பிரித்த பகுதி $F\cos\alpha$ ஆகும்.

பயிற்சி 2.3

1. ஒரு வண்டி ஓர் ஒப்பமான ஓரிருப்புப்பாதையில் ஓய்வில் இருக்கின்றது. அது 100 இரு. எடைக்குச் சமனான ஒரு கிடை விசையினால் அப்பாதைகளின் திசையோடு 60° கோணத்தை ஆக்குந் திசையில் இழுக்கப்படுகிறது. அவ்வண்டியை முற்பக்கமாகத் தூண்ட முயலும் விசையின் அளவைக் காண்க.

2. P என்னும் விசையினுடைய கூறுகளை அதனோடு எதிர்பக்கங்களிற் 60°, 15° என்னுங் கோணங்களை ஆக்கும் இரு திசைகளிற் காண்க.

3. கொடுக்கப்பட்ட நிலைக்குத்துவிசை F என்பதைத் தம் விளைவாகக்கொண்ட ஒரு கிடை விசையையும், நிலைக்குத்தோடு 60° கோணத்திற் சாய்ந்த ஒரு விசையையுங் காண்க.

4. ஒரு விசை இரண்டு கூறு விசைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டபொழுது அவற்றுள் ஒரு கூறு அவ்விசைக்குச் செங்குத்தாயும், அளவில் சமனாயும் இருந்தால், மற்றைக் கூறின் திசை, அளவுகளைக் காண்க.

5. நிலைக்குத்திலே மேன்முகமாகத் தாக்குகின்ற 30 கி. கிராம் எடை விசையொன்று இரு விசைகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது; ஒருவிசை கிடையாய் 15 கி.கிராம் எடைக்குச் சமனாயின், மற்றை விசையினுடைய அளவு, திசைகளைக் காண்க.

6. இரு விசைகளின் அளவுகள் 3:5 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன; விளைவினது திசை சிறியதன் திசைக்குச் செங்கோணத்தில் இருக்கின்றது; பெரியதன் அளவையும், விளைவின் அளவையும் ஒப்பிடுக.

7. இரு விசைகள் ஒன்றுக்கொன்று $\frac{5}{5}$ செங்கோணத்தில் தாக்கு கின்றன. இவ்விசைகளின் விளைவு சிறியதற்குச் செங்குத்தாயிருக்கிறது. பெரியது 30 இரு. எடைக்குச் சமனுயின், மற்றைய விசையையும், விளை வின் அளவையுங் காண்க.

8. A, B, C என்பன ஒரு வட்டப் பரிதியிலுள்ள மூன்று புள்ளிகள் AB, BCக்குத் தலைகீழ் விகித சமத்திலுள்ள விசைகள் முறையே AB, BC வழியே செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு B என்னும் புள்ளி யில் வட்டத்தின் தொடுகோட்டுவழிச் செயல்படும் எனக் காட்டுக.

9. அளவும், செயல்படும் கோடும் தெரிந்த ஒரு விசையை, கொடுக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இரு சமவிசைகளாக, (1) அப்புள்ளிகள் அவ்விசையின் ஒரே பக்கத்தில் இருக்கும்போது (2) அவை எதிர்ப்புக்கங்களில் இருக்கும்போது ஒரு வடிவகணித வமைப்புத் தந்து பிரிக்க.

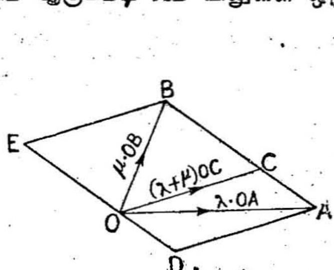
10. கொடுக்கப்பட்ட திசையிலே, கொடுத்த ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற ஒரு தரப்பட்டவிசை இரு கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. அக்கூறுகளுடைய எல்லாத் திசைகளுக்கும், ஒன்று மாறு அளவுடன் இருக்குமாயின், மற்றையதைக் குறிக்கின்ற கோட்டின் முனை குறித்த ஒரு வட்டத்தில் அமையுமெனக் காட்டுக.

---

12. O என்னும் ஒரு புள்ளியில் OA, OB என்னுந் திசைகளில் $\lambda.OA$, $\mu.OB$ என்பனவற்றுற் அளவிற் குறிக்கப்பட்ட இரு விசைகள் தாக்கினுல், அவ்விசைகளின் விளைவு $(\lambda+\mu)$ OC யாற் குறிக்கப் படும். இங்கு C என்பது $\lambda.CA=\mu.CB$ ஆகும்படி AB யிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.

OCAD, OCBE என்னும் இணை கரங்களைப் பூர்த்தி செய்க.

விசையிணைகரத்தால், விசை $\lambda.OA$ என்பது $\lambda.OC, \lambda.OD$ என் பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசை களுக்குச் சமன்.



படம் 16

அன்றியும், விசை $\mu.OB$ என்பது $\mu.OC$, $\mu.OE$ என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளுக்குச் சமன்.

எனின், விசைகள் $\lambda.OA$, $\mu.OB$ இரண்டுஞ் சேர்ந்து

விசை $(\lambda+\mu)$ OCயுடன், விசைகள் λ.OD, μ.OE என்பன வற்றிற்குச் சமம்.

ஆனால், λ.OD, μ.OE என்ற விசைகள் சமனுமெதிருமானவை. (ஏனெனில், $\lambda.OD=\lambda.CA=\mu\ C.B=\mu.OE$)
ஆகவே, இவை சமநிலையில் இருக்கும்.

எனின், விளைவு $(\lambda+\mu)$ OC. ஆகும்.

கிளை.தே 1.

C என்பது ABயின் மையப்புள்ளியாயின், OA, OB என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு 2OC ஆகும்.

குறிப்பு : OC என்பது OA, OB என்பனவற்றை அடுத்துள்ள பக்கங்களாகக் கொண்ட இணைகரத்தின் மூலை விட்டத்தின் பாதி என்பதிலிருந்தும் இது தெளிவாகும்.

கிளை. தே 2

ஒரு புள்ளி Oவில், $\lambda.\vec{OA}, \mu.\vec{OB}, \gamma.\vec{OC}$ ....
என்ற விசைகள் செயற்பட்டால், அவைகளின் விளைவு
$(\lambda+\mu+\gamma+\ldots\ldots\ldots)$OG ஆகும்; இங்கு G என்பது
A, B, C...என்ற புள்ளிகளில் முறையே $\lambda, \mu, \gamma, \ldots\ldots$ என்ற அலகுகள்கொண்ட நிறைகளிருப்பின் அவைகளின் ஈர்ப்புமைய மாகும்.

(ஈர்ப்புமையம் : அதிகாரம் 10. பிரிவு 1. வரையறையைக் காண்க)

பயிற்சி 2·4

1. ABCD என்பது ஓரிணைகரம்; Pஎன்னும் ஒரு துகள் PA, PC என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான விசைகளால் A,C என்பனவற்றின் முகமாகக் கவரப்பட்டு, PB, PD என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான விசை களால் B,D என்பனவற்றிலிருந்து தள்ளப்படுகின்றது. Pஎன்பது எங்கிருந்தாலுஞ் சமநிலையிலிருக்கும் எனக் காட்டுக.

2. A, B, C என்பன நிலையான மூன்று புள்ளிகள், P என்பது, PA, PB என்னும் விசைகளின் விளைவு எப்பொழுதும் C வழியாகச் செல்லுமாறுள்ள ஒரு புள்ளி. Pயின் இயங்குவரை ஒரு நேர்கோடெனக் காட்டுக.

3. யாதானுமொரு புள்ளியை ஒரு முக்கோணத்தினுடைய கோணப் புள்ளிகளுக்குச் சேர்க்குங் கோடுகளாற் குறிக்கப்படும் விசைத்தொகுதி, அப்புள்ளியிலிருந்து அம்முக்கோணப் பக்கங்களுடைய மையங்களுக்கு வரையும் நேர்கோடுகளாற் குறிக்கப்படுந் தொகுதிக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

4. ஒரு நாற்கரத்தினுள் கிடக்கும் ஒரு புள்ளி, அதைக் கோணப் புள்ளிகளோடு சேர்க்குங் கோடுகளாற் குறிக்கப்படும் விசைகளால் தாக்கப்படும்பொழுது, சமநிலையில் இருந்தால், அப்புள்ளியின் நிலையைக் காண்க.

5. நிலையான மையத்தையுடைய ஒரு வட்டத்தினுள்ளே கிடக்கும் P என்னும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து PA_1, PA_2, PA_3, PA_4 என்னும் நேர்கோடுகள், P வழியே செல்லும் ஆரையோடு சமசாய்விலிருக்குமாறும், பரிதியைச் சந்திக்குமாறும் வரையப்பட்டிருக்கின்றன. இக்கோடுகள் Pயிலிருந்து வீசும் விசைகளைக் குறிக்குமாயின், அவற்றின் விளைவு அவ்வட்ட ஆரையின் அளவைச் சார்ந்ததல்ல எனக் காட்டுக.

6. ABC என்ற முக்கோணத்தில், விசைகள் $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$ என்பன, முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்டமையம் Sஇல் செயல்படுகின்றன. O என்பது செங்குத்து மையமானால், அவ்விசைகளின் விளைவு $\vec{SO}$ எனக் காட்டுக.

7. ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம். அதன் எதிர்ப்பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் Eஎன்னும் புள்ளியில் சந்திக்கின்றன. O என்பது யாதேனும் ஒரு புள்ளியாயின், OA, OB, OC, OD என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு 4OE எனக் காட்டுக.

8. ABCD என்பது ஒரு நாற்கரம். AB, AD, CB, CD என்பன வற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்கினுல், அவற்றின் விளைவு அந்த நாற்கரத்தின் மூலைவிட்டங்களின் மையப்புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் நான்கு மடங்காற் குறிக்கப்படும் எனக் காண்பி.

9. ABC என்ற முக்கோணத்தில் Dஎன்பது Aயிலிருந்து BCக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடியாகும். secB, secC என்ற அளவுள்ள இருவிசைகள் முறையே AB, AC என்ற பக்கங்கள்வழிச் செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவு (tanB+tanC) என்றும் அது AD வழிச் செயல்படுமென்றும் காட்டுக.

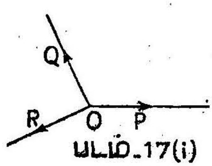
10. AB, AC, 2 CB என்பவற்றுற் முற்றிலும் குறிக்கப்பட்ட விசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வழியே செயல் படுகின்றன; அவ்விசைகளின் விளைவு AC என்ற பக்கத்தை 2:1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் காட்டுக. அவ்விளைவின் அளவையும் காண்க.

11. ABC என்ற முக்கோணத்தில் AC யை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளில் Aயிற்கு அண்மையில் உள்ள புள்ளி Mஆகும்; ABயை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளில் Bயிற்கு அண்மையில் உள்ள புள்ளி Nஆகும்; அளவிலும், திசையிலும் MN ஆல் குறிக்கப்படும் விசையை ஒவ்வொன்று ஒரு பக்கத்தின் வழியே செயல்படும்வண்ணம் மூன்று விசைகளாகப் பிரிக்கவும்.

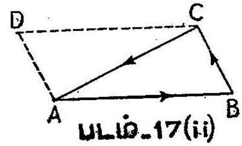
12. ABCDEF என்பது ஓர் அறுகோண வடிவுள்ள தட்டாகும்; A, B இவற்றிலிருந்து மற்றைய நான்கு உச்சிகளை நோக்கி அவற்றின் தூரங்களுக்கு விகிதசமமுள்ள அளவுடைய விசைகள் செயல்படுகின்றன; அவற்றின் விளைவு 6 AEக்கு விகிதசமமாயிருக்குமென்று காட்டி, அது செயல்படும் கோட்டைக் காண்க.

13. விசைமுக்கோணம் (Triangle of forces)

ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள், ஒரேமுக ஒழுங்கில் எடுத்த ஒரு முக்கோணப் பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்பட்டால், அவை சமநிலையிலிருக்கும்.



படம்-17(i)



படம்-17(ii)

புள்ளி Oவில் செயல்படும் P, Q, R என்ற விசைகள் முக்கோணம் ABC யினுடைய பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படுக.

ஆயின், அவை சமநிலையில் இருக்குமெனக் காட்டலாம்.

ABCD என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்தி செய்க.

BC, AD என்பன சமமும் இணையுமாகையால், BC, AD என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகள் சமமாகும். ஆகவே, விசைகள்

AB, BC, CA என்பன விசைகள் AB, AD, CA என்பனவற்றிற்குச் சமம். இனி, AB, AD என்னும் விசைகளின் விளைவு, விசையிணைகரத்தால், ACயினுற் குறிக்கப்படும்.

எனின், AB, BC, CA என்பனவற்றின் விளைவு, AC, CA என்னும் விசைகளின் விளைவிற்குச் சமன்; ஆகையால், அது பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, P, Q, R என்னும் மூன்று விசைகளுஞ் சமநிலையிலிருக்கின்றன.

குறிப்பு 1 :—'திசையி'க்குறியீட்டு முறையில், இதையே,

$\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=O$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

குறிப்பு 2 :—விசைமுக்கோணத்தில், மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியிலே தாக்கவேண்டும். மாறுக, அவ்விசைகளுடைய் தாக்கக் கோடுகள் AB, BC, CA என்றிருந்தால், அவ்விசைகள் சமநிலையில் நில்லா. விசைகள் AB, BCயின் விளைவு, B என்னும் புள்ளியில் செயல்படும். இவ்விளைவு A C க்குச் சமமாயும் இணையாகவும் இருக்கும். எனவே, அவ்விசைத்தொகுதி எதிர்த்திசைகளிலே தாக்குகின்ற சமனுமெதிருமாயுள்ள AC, CA என இரு விசைகளாக ஒடுங்கும். அத்தகைய விசைகள் சமநிலையில் நில்லாதெனக் காண்போம், (அதிகாரம் 4, பிரிவு 3, காண்க.)

கி.தே

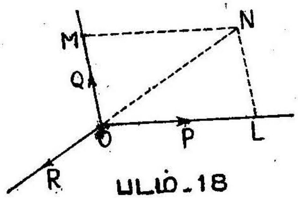
AB, BC, CA என்பனவற்ருற் குறிக்கப்படும் விசைகள் சமநிலையிலிருக்கின்றமையாலும், இம்மூன்று விசைகளுஞ் சமநிலையிலிருக்கும் பொழுது ஒவ்வொன்றும் ஏனைய இரண்டின் விளைவிற்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கின்றமையாலும், AB, BC என்பனவற்றின் விளைவு CAயிற்குச் சமனுமெதிருமாயிருக்கும் என்பது பெறப்படும். (அ-து) அவற்றின் விளைவு ACயால் குறிக்கப்படும்.

எனின், ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற இருவிசைகள், ஒரு முக்கோணத்தினுடைய இருபக்கங்கள் AB, BCயால் குறிக்கப்பட்டால், அவற்றின் விளைவு மூன்ரும் பக்கத்தின் எதிர்த்திசை (அ-து) ACயால் குறிக்கப்படும்.

குறிப்பு :'திசையி'க்குறியீட்டு முறையில், இதை $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

14. விசை முக்கோணத்தின் மறுதலையும் உண்மையாகும். அது பின்வருமாறு:

ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள் சமநிலையிலிருந்தால், அம் மூன்று விசைகளையும், ஒரேமுக ஒழுங்கில் எடுத்த ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கக்கூடும்



படம்-18

O என்ற புள்ளியிலே தாக்குகின்ற P, Q, R என்ற மூன்று விசைகள் சமநிலையிலே இருக்கட்டும்.

P, Q என்பனவற்றினுடைய திசைகளில், இவ்விசைகளைக் குறிக்கும்படி முறையே OL, OM என்பனவற்றை அளந்தெடுக்க. OLNM என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்க. ON ஐ இணை, P, Q, R என்னும் விசைகள் மூன்றுஞ் சமநிலையிலேயே இருக்கின்றமையால், ஒவ்வொன்றும் ஏனையிரண்டின் விளைவிற்குச் சமனுமெதிருமாய் இருத்தல் வேண்டும். எனின், R என்பது P, Q என்பனவற்றின் விளைவிற்குச் சமனுமெதிருமாய் இருத்தல்வேண்டும்; ஆகவே, அது NO என்பதாற் குறிக்கப்படல் வேண்டும். அன்றியும், LN என்பது OM என்பதற்குச் சமனும் இணையாயும் இருப்பதால், Q என்பது LN ஆல் குறிக்கப்படுகிறது, எனின், விசைகள் P, Q, R என்னும் மூன்றும் △OLN னுடைய பக்கங்கள் OL, LN, NO என்பனவற்றிற்கு இணையாயும், விகிதசமமாயும் இருக்கும்.

தன்னுடைய பக்கங்களானவை முறையே OLN னுடைய பக்கங்களுக்கு இணையாயுள்ள வேறு யாதானுமொரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் △OLN னுடைய பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாய், அதுபற்றி அவ்விசைகளுக்கும் விகிதசமமாயிருக்கும்.

குறிப்பு 1. செங்குத்து விசை முக்கோணம் (perpendicular triangle of forces)

தன்னுடைய பக்கங்களானவை முறையே △OLN னுடைய பக்கங்களுக்குச் செங்குத்தாயுள்ள யாதானுமொரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் △OLN னுடைய பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாய், அதுபற்றி அவ்விசைகளுக்கும் விகிதசமமாய் இருக்கும்.

ஆகவே, ஒரு புள்ளியிலே செயல்படும் மூன்றுவிசைகள், ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாயும், அதே ஒழுங்கில் எடுத்த இப்பக்களுக்கு முறையே செங்குத்தாயும் இருப்பின், அவை சமநிலையில் இருக்கும்.

குறிப்பு 2

அளவில் தெரிந்த மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்போதுள்ள அவற்றின் சார்திசைகளைக் காண்பதற்கு முந்திய பிரிவிலுள்ள விவரணம் எளிதான ஒரு வரைப்பட முறையைத் தருகின்றது.

அவ்விசைகளுக்கு விகித சமமாயுள்ள பக்கங்களைக்கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை நாம் அமைத்தல் வேண்டும். [அவ்விசைகளுள் இரண்டைக் கூட்ட வரும்தொகை, மூன்ருவதற்குச் சிறிதாகுலன்றி, இவ்வமைப்பு எப்பொழுதும் சாத்தியமானதே] இம்முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் திசைகளே, விசைகளின் திசைகளாகும்.

15. இலாமியினது தேற்றம் : (Lami's Theorem)

மூன்று விசைகள் ஒரு துகளின்மீது தாக்கிக்கொண்டு அதனைச் சமநிலையில் வைத்திருக்குமாயின், ஒவ்வொன்றும் ஏனையிரண்டிற்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தின் சைனிற்கு விகிதசமம்.

விசைகள் P, Q, R என்பன சமநிலையில் இருக்கவும். (படம் 18ஐப் பார்க்கவும்) P, Q என்பனவற்றின் திசைகளில் இவ்விசைகளைக் குறிக்கும்படி OL, OM என்பனவற்றை அளந்தெடுக்க. OLNM என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய். ஆயின், LN என்பது Q என்பதையும், NO R என்பதையும் என்பது குறிக்கும்.

திரிகோண கணிதத்திலிருந்து, $\triangle OLN$ னுடைய பக்கங்கள் எதிர்க் கோணங்களுடைய சைன்களுக்கு விகிதசமமாகையால், நாம்பெறுவது

$$\frac{OL}{\sin \angle LNO} = \frac{LN}{\sin \angle NOL} = \frac{NO}{\sin \angle OLN}$$

ஆனால்,

$$\sin LNO = \sin NOM = \sin(180^\circ - QOR) = \sin QOR$$

$$\sin NOL = \sin(180^\circ - ROP) = \sin ROP$$

$$\sin OLN = \sin(180^\circ - POQ) = \sin POQ$$

அன்றியும், $LN = OM$.

எனின், $\frac{OL}{\sin QOR} = \frac{OM}{\sin ROP} = \frac{NO}{\sin POQ}$

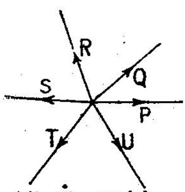
(அ-து) $\frac{P}{\sin QOR} = \frac{Q}{\sin ROP} = \frac{R}{\sin POQ}$

16. விசைப்பல்கோணம் (Polygon of forces)

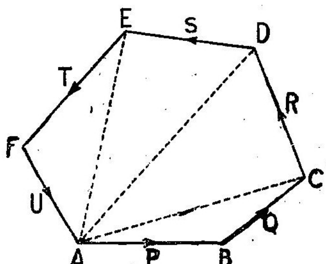
ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்ற பல்வேறு விசைகளும் ஒரேமுக ஒழுங்கில் எடுத்த ஒரு பல்கோணத்தினுடைய பக்கங்களால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்பட்டால், அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்.

ABCDEF என்னும் பல்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் AB, BC CD, DE, EF, FA என்பன O என்னும் ஒரு துகளின்மீது செயற்படும் விசைகளைக் குறிக்க. AC, AD, AE என்பனவற்றை இணை.

இவ்வதிகாரம், பிரிவு 13 கிளைத் தேற்றத்தின்படி, விசைகள் AB, BC என்பனவற்றின் விளைவு AC யால் குறிக்கப்படும்.



படம்.19(i)



படம்.19(ii)

அதுபோல, AC, CD என்னும் விசைகளின் விளைவு AD யாகும்.

மேலும்,AD, DEயின் விளைவு AEயாகும்;

AE, EFஇன் விளைவு AF ஆகும்.

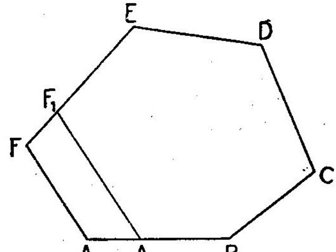
ஆகவே, எல்லா விசைகளுடைய விளைவு AF, FA என்பனவற்றின் விளைவிற்குச் சமன்; அதாவது விளைவு பூச்சியமாகிறது.

எனின், விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றன.

குறிப்பு 1 :—விசைகளின் தொகை எதுவாயிருப்பினும், இதே முறை நிருபணம் பயன்படும்.

குறிப்பு 2 : இந்நிருபணத்திலிருந்து, பல்கோணப் பக்கங்கள் ஒரே தளத்தில் இருக்கவேண்டுமென்னும் நியதியில்லை என்பது தெளிவாகின்றது.

குறிப்பு 3 : விசைப்பல்கோணத்தின் மறுதலை உண்மையன்று.



படம்-20

ஒரு பல்கோணத்தினுடைய பக்கங்களின் திசைகள் தெரிந்ததனால் அப்பக்கங்களுடைய விகிதங்கள் அறியப்படா வென்பதே அதற்குக் காரணம் (ஒரு முக்கோணத்தில் பக்கங்களின் திசைகள் தெரிந்தால், அவைகளின் விகிதங்களும் தெரியப்படும்.)

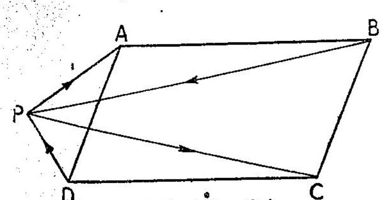
உதாரணமாக, மேலுள்ள உருவத்தில் ABயில் A_1 என்னும் யாதேனுமொருபுள்ளி எடுத்து A_1F_1 என்பதை AFக்கு இணையாக EF என்பதை F_1இல் சந்திக்கும்படி வரையலாம். புதுப் பல்கோணம் A_1BCDEF_1 என்பதனுடைய பக்கங்கள் முறையே ABCDEF என்பதனுடைய பக்கங்களுக்கு இணையாக இருப்பினும், ஒத்த பக்கங்கள் விகிதசமமல்லவென்பது தெளிவு.

17. செங்குத்து விசைப்பல்கோணம்

ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் விசைகள் ஒரு மூடிய பல்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாயும், அதே ஒழுங்கில் எடுத்த இப்பக்கங்களுக்கு முறையே செங்குத்தாயும் இருந்தால், அவை சமநிலையில் இருக்கும்.

உதாரணம் 1

ABCD என்பது ஓர் இணைகரம். P என்பது யாதேனுமொரு புள்ளி. PA, BP, PC, DP என்பனவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.



படம்-21

BP, PA என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு அளவிலும், திசையிலும் BA யால் குறிக்கப்படுகிறது. (விசை முக்கோணம்)
இவ்விளைவு Pயில் செயல்படும்.

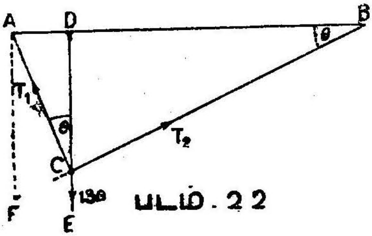
மேலும், DP, PCயாற் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவு

அளவிலும், திசையிலும் DCயால் குறிக்கப்படுகிறது. இவ்விளைவும் Pயில் செயல்படுகிறது.

இவ்விரு விளைவுகளும் ஒரே புள்ளியில் செயல்பட்டுச் சமனுமெதிருமாயிருப்பதால், அவை சமநிலை யெய்தும்.

உதாரணம் 2

130 இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் ஒரே கிடைக்கோட்டில் 5 அடி 5 அங்குலம் இடைத்தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்குப் பிணைக்கப்பட்ட 1 அடி 4 அங்; 5 அடி 3 அங் என்னும் நீளமுள்ள ஈரிழைகளாலே தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. அவ்விழைகளுடைய இழுவிசைகளைக் காண்க.



படம் 22

AC, BC என்பன இரண்டு இழைகளாகுக.

ஆயின்,

AC = 1 அடி 4 அங் = 16 அங்

BC = 5 அடி 3 அங் = 63 அங்

AB = 5 அடி 5 அங் = 65 அங்

$65^2 = 16^2 + 63^2$ ஆதலின், $\angle ACB$ ஒரு செங்கோணம். Cயில் உள்ள எடையின் திசை CE என்பது, AB என்பதை Dயில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.

$\angle CBA = \theta$ என்க. $\angle ACD = 90° - \angle BCD = \angle CBD = \theta$

T_1, T_2 என்பன இழைகளினுடைய இழுவிசைகளாகுக. இலாமியினது தேற்றத்தால், நாம் பெறுவது

$$\frac{T_1}{\sin ECB} = \frac{T_2}{\sin ECA} = \frac{130}{\sin ACB}$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{T_1}{\sin BCD} = \frac{T_2}{\sin \theta} = \frac{130}{\sin 90°}$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{T_1}{\sin (90-\theta)} = \frac{T_2}{\sin \theta} = 130$$

$$\therefore \quad \frac{T_1}{\cos \theta} = \frac{T_2}{\sin \theta} = 130$$

$$\therefore \quad T_1 = 130 \cos\theta \; ; \; T_2 = 130 \sin\theta$$

ஆனால், $\cos\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{63}{65}$;

$$\sin\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{16}{65}$$

$$\therefore \quad T_1 = 130 \cos\theta = \frac{130 \times 63}{65} = 126 \text{ இரு. எடை}$$

$$T_2 = 130 \sin\theta = \frac{130 \times 16}{65} = 32 \text{ இரு. எடை}$$

வேறொருவழி

$\triangle ACB$யினுடைய பக்கங்கள் முறையே விசைகள் T_1, T_2, 130 என்பனவற்றினுடைய திசைகளுக்குச் செங்குத்தாயுள்ளன.

$$\therefore \quad \frac{T_1}{BC} = \frac{T_2}{AC} = \frac{130}{AB}$$

(அ-து) $\frac{T_1}{63} = \frac{T_2}{16} = \frac{130}{65}$

$$\therefore T_1 = 63 \times \frac{130}{65} = 126$$

$$T_2 = 16 \times \frac{130}{65} = 32$$

வரைப்படமுறை

Aயின் வழிச்செல்லும் செங்குத்துக்கோட்டை F-இல் சந்திக்குமாறு BC என்பதை நீட்டுக.

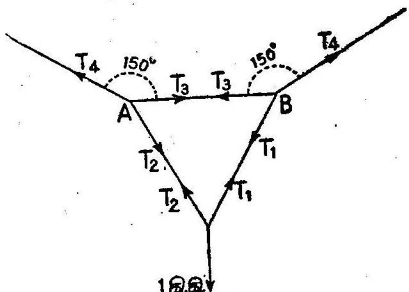
ஆயின், ACF என்னும் முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் T_1. T_2, W என்னும் மூன்று விசைகளுக்கும் இணையாகும். எனின், ACF என்பது விசை முக்கோணமாகும்.

$$\therefore \quad \frac{T_1}{AC} = \frac{T_2}{FC} = \frac{130}{AF}$$

உதாரணம் 3

எடையில்லாத மூன்று சமவிழைகள் ABC என்னும் சமபக்க முக்கோணமொன்றை ஆக்கும்படி முடிச்சிடப்பட்டிருக்கின்றன.

Cயிலிருந்து 1 கிலோ கிராம் எடை தொங்கவிடப்படுகிறது. அம்முக்கோணமும், எடையும் AB கிடையாக இருக்கும்வண்ணம், D,E என்னும் நிலையான புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட AD, BE என்னும் எடையில்லாத இரு சமவிழைகளினலே தாங்கப்படுகின்றன. $\angle DAB$, $\angle ABE$ என்னும் கோணங்கள் ஒவ்வொன்றும் 150° எனில், ஒவ்வொருஇழைகளிலும் உள்ள இழுவிசையைக் காண்க.



படம் - 23

இழைகளில் உள்ள இழுவிசைகளைப் படத்தில் காட்டியபடி கொள்வோம். Cஎன்னும் புள்ளியில் இயங்கும் விசைகளுக்கு இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவதினல் நாம் பெறுவது,

$$\frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{T_1}{\sin 150^\circ} = \frac{T_2}{\sin 150^\circ}$$

$$\text{ஆகவே } T_1 = T_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Aயிலுள்ள விசைகளுக்கு, இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த, நாம் பெறுவது,

$$\frac{T_3}{\sin 150^\circ} = \frac{T_2}{\sin 150^\circ} = \frac{T_4}{\sin 60^\circ}$$

ஆகவே, $T_2 = T_3$: அன்றியும் $T_4 = \sqrt{3}, \quad T_2 = 1$

$$\therefore T_1 = T_2 = T_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$T_4 = 1$$

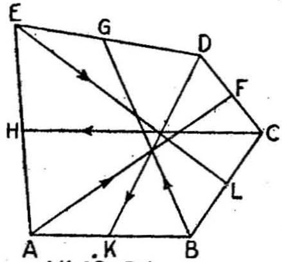
உதாரணம் 4

ஒரு புள்ளியில் தாக்கும் ஒரே தளத்திலுள்ள ஐந்து விசைகள் ஒரு ஐங்கோணத்தின் உச்சிகளை அவைகளுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களின் மையப்புள்ளிகளுடன் இணைக்கும் கோடுகளால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்பட்டால், அவை சமநிலையில் இருக்கின்றன எனக் காட்டுக.

விசைப்பல்கோணத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது,

$$\vec{AF}=\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CF}$$

$$=\vec{AB}+\vec{BC}+\tfrac{1}{2}\vec{CD}$$



படம் 24

$$\vec{BG}=\vec{BC}+\vec{CD}+\tfrac{1}{2}\vec{DE}$$

$$\vec{CH}=\vec{CD}+\vec{DE}+\tfrac{1}{2}\vec{EA}$$

$$\vec{DK}=\vec{DE}+\vec{EA}+\tfrac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{EL}=\vec{EA}+\vec{AB}+\tfrac{1}{2}\vec{BL}$$

$$\therefore \vec{AF}+\vec{BG}+\vec{CH}+\vec{DK}+\vec{EL}=\tfrac{5}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DE}+\vec{EA})$$
$$=O$$

எனவே, இவ்விசைகள் சமநிலையில் நிற்கும்.

பயிற்சி 2·5

(1) ஒரு புள்ளியில் செயல்படும் மூன்று விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றன; முதலாவதற்கும் இரண்டாவதற்கும் இடையே உள்ள கோணம் $90°$ ஆகவும், இரண்டாவதற்கும் மூன்றாவதற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $120°$ ஆகவுமிருந்தால், அவ்விசைகளுடைய விகிதங்களைக் காண்க.

(2) 7P, 5P, 8P என்பனவற்றிற்குச் சமமான விசைகள் ஒரு துளிகளின்மீது தாக்கிக்கொண்டு சமநிலையில் இருக்கின்றன; வடிவ கணிதவமைப்பிலும், கணிப்பாலும், பின்ஜோடி விசைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(3) கொடுக்கப்பட்ட திசையில் செயல்படும் 4P என்னும் விசையுடன் சமநிலை உண்டாக்குகின்ற இருவிசைகள் 2P, 3P என்பனவற்றினுடைய திசைகளை வடிவகணித முறையில் காண்க,

(4)5P,12P,13P என்பனவற்றிற்குச் சமமான விசைகள் ஒரு துகளின் மீது தாக்கிக்கொண்டு சமநிலையில் இருக்கின்றன. வடிவ கணிதவமைப் பாலும், கணிப்பாலும் அவற்றினுடைய திசைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(5) ABC என்ற முக்கோணத்தில் D,E என்பன AB, ACயின் மையப்புள்ளிகள். BE, DC என்பனவற்றால் குறிக்கப்படுகின்ற விசை களின் விளைவு அளவிலும், திசையிலும் $\frac{3}{2}$BC யால் குறிக்கப்படுமெனக் காட்டுக.

5 (a) ABC என்பது ஒரு முக்கோணம். D, E, F என்பன அத னுடைய பக்கமையங்கள். AD, $\frac{2}{3}$ BE, $\frac{1}{3}$ CF என்பனவற்றாற் குறிக் கப்படும் விசைகள் AD என்பதும் BE என்பதும் சந்திக்கின்ற புள்ளியில் ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்றன. விளைவு, அளவு, திசையில் $\frac{1}{2}$ ACயால் குறிக்கப்படுமென்றும் அதன் தாக்கக்கோடு BC என்பதை 2 ; 1 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமென்றும் காட்டுக.

(6) A யும், B யும் நிலையான இரண்டு புள்ளிகள். P என்பது λAP, λPB என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளாலே தாக்கப் படும் ஒரு புள்ளி. புள்ளி P எங்கிருந்தாலும், அவ்விசைகளின் விளைவு அளவிலும், திசையிலும் மாறாதெனக் காட்டுக.

(7) ஒரு முக்கோணம் ABC யின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பன,முறையே D,E,Fஎன்பனவற்றில் இருசமக் கூறிடப்படுகின்றன. DA, EB, FC என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படுகின்ற விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

(8) I என்பது ABC என்ற முக்கோணத்தின் உள்வட்டமையம் P, Q, R என்ற விசைகள் IA, IB, IC என்பவற்றின் வழியே செயல் பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றன.

$P : Q : R = \cos\frac{1}{2}A : \cos\frac{1}{2}B : \cos\frac{1}{2}C$ எனக் காட்டுக.

(9) ஒரே கிடைக்கோட்டில் உள்ள நிலையான இரு புள்ளிகள் A, B என்பவற்றிற்கு ACB என்ற இழையின் இறுதி முனைகள் கட்டப் பட்டிருக்கின்றன, அவ்விழையில் கொடுக்கப்பட்ட Cஎன்ற புள்ளிக்குத் தரப்பட்ட W என்னுமொரு எடை முடிச்சுப்போடப்பட்டிருக்கின்றது. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் a,b,c யாகவும், அதன்பரப்பு $\triangle$ ஆகவும் இருப்பின், CA என்ற பகுதியில் உள்ள இழுவிசை $=\frac{Wb(c^2+a^2-b^2)}{4C\triangle}$ எனக் காட்டுக,

(10) ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்ற இருவிசைகள் செங்கோணத்தில் இருக்கின்றன. அவற்றுள் ஒன்றோடு 150° கோணத்தை உண்டாக்குகின்ற மூன்றும் விசையொன்றுடன் அவை சமநிலை அடைகின்றன. அவ்விரு விசைகளுள் பெரியது 3 இரு. எடையாயின், ஏனையயிரண்டினுடைய அளவுகள் என்னவாயிருத்தல் வேண்டும்?

(11) இரண்டு ஆட்கள் W என்னும் எடையைத் தம்மிடையே அவ்வெடையிற் கட்டிய இரு கயிறுகளாற் றூக்கிச் செல்கின்றனர். ஒரு கயிறு நிலைக்குத்திற்கு 45°யிலும், மற்றையது 30°யிலும் சாய்ந்துள்ளன. ஒவ்வொரு கயிற்றிலும் உள்ள இழுவிசையைக் காண்க.

(12) 10 இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் 26 அங். நீளமுள்ள ஓரிழையாலே நிலையான ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது; அது F என்னும் ஒரு கிடை விசையாலே தாக்கப்பட்டு, நிலையான அப்புள்ளியின் வழிச்செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டிலிருந்து 10 அங். தூரத்தில் ஓய்விலிருக்கிறது. F இன் அளவையும், அவ்விழையின் இழுவிசையையுங் காண்க.

(13) ஒரே கிடைத்தளத்திலுள்ள இரு இணைச்சட்டங்களின்மீது செல்கின்ற ஓரிழையினுடைய முனைகளுக்கு இரு சம எடைகளும், அச்சட்டங்களுக்கு இடையேயுள்ள அவ்விழையின் ஒரு புள்ளிக்கு வேறொரு சம எடையுந் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அத்தொகுதி சமநிலையை அடையும் நிலையையும் ஒவ்வொரு சட்டத்தின் மீதுள்ள அமுக்கத்தையும் காண்க.

(14) எடையில்லாத வளையங்கள் இரண்டு வழவழுப்பான ஒருநிலைக்குத்து வட்டத்தின்மீது வழுக்குகின்றன. அவ்வளையங்களுக்குள்ளாகச் செல்லும் ஓரிழை தன்னுடைய இரு முனைகளிலும் அவ்வளையங்களுக்கு இடையேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலும் எடைகளைக்கொண்டுள்ளது. அவ்வட்டத்தின் மிகவுயர்ந்த புள்ளியிலிருந்து 30° தூரத்திலுள்ள புள்ளிகளில் அவ்வளையங்கள் இருக்கும்போது சமநிலை வருமாயின், அம்மூன்று எடைகளுக்குமுள்ள தொடர்பைக் காண்க.

(15) 15 இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் 7 அங்; 24 அங்; என்னும் நீளங்களையுடைய ஈரிழைகளாலே தொங்கவிடப்படுகின்றது: அவ்விழைகளின் மற்றை முனைகள் 25 அங். நீளமுள்ள ஒரு கோலினுடைய முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அப்பொருளானது அக்கோலினது நடுப்புள்ளிக்கு நேரே கீழாகத் தொங்கும்படி அக்கோல் வைக்கப்பட்டிருந்தால், அவ்விழையினுடைய இழுவிசைகளைக் காண்க.

(16) ஒரு பொருள் வழவழப்பான ஒரு நிலைக்குத்து வட்டக் கம்பியொன்றின்மீது வழுக்குதற்குக் கட்டின்றி இருக்கின்றது. அது அவ்வட்டத்தின் ஆரைக்குச் சமனான ஓரிழையினால் அவ்வட்டத்தின் மிக வுயர்ந்த புள்ளிக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அவ்விழையின் இழுவிசையையும் அவ்வட்டத்தின் எதிர்த்தாக்க விசையையும் கண்டறிக.

(17) W எடையுள்ள ஓர் உருண்டையான மணி வழவழப்பான ஒரு நிலைக்குத்து வட்டக் கம்பியொன்றின்மீது வழுக்குதற்குக் கட்டின்றி இருக்கின்றது. அது ஒரு இலேசான இழையினால் அவ்வட்டத்தின் மிகவுயர்ந்த புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. சமநிலையில், இழை, தளராமல் இருக்கும்பொழுது, நிலைக்குத்துடன் கோணம் θ உண்டாக்கு கின்றது. இழையிலுள்ள இழுவிசையையும், அவ்வட்டக் கம்பியின் எதிர்த்தாக்க விசையையும் காண்க.

(18) ABCD என்னும் ஒரு இலேசான இழையின் முனைகள் A,D என்பன நிலையானவை. இழையில், B, C என்ற புள்ளிகளில் எடைகள் கட்டப்பட்டுள்ளன. AB, BC, CD என்ற இழையின் பகுதிகள் கிடைக்கோட்டிற்கு முறையே 60°, 30°, 55° யில் சாய்ந்துள்ளன. B யிலுள்ள எடை 22 இரு. என்றால், C யிலுள்ள எடையைக் காண்க.

(19) ABCD என்னுமொரு நாற்கரத்தினுடைய பக்கங்களின் நீளவாட்டில் செயல்படும் நான்கு விசைகள் அப்பக்கங்களுக்கு விகிதசமமாயும் இருக்கின்றன; இவைகளில் மூன்று AB, BC, CD, என்னுந் திசைகளிலும், நாலாவது Aயிலிருந்து Dயிற்குள்ள திசையிலுந் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவினுடைய அளவையும் திசையையும் காண்க. அது CD யைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் கண்டறிக.

(20) F, H என்பன ABCD என்னும் நாற்கரத்தின் பக்கங்களாகிய BC, DAயின் மையப்புள்ளிகளாகும். AB, DC என்பவற்றிற்கு இணையாகவும் சமனுமாயுள்ள இருவிசைகள் ஒரு துகளின்மீது தாக்கினால், அவற்றின் விளைவு HFற்கு இணையாகவும் 2HF ற்குச் சமனாயுமிருக்கு மெனக் காட்டுக :

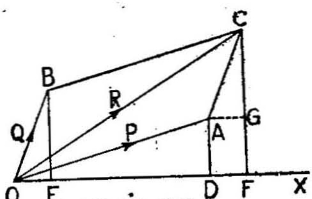
(21) ABCD என்னுமொரு நாற்கரத்தினுடைய பக்கங்களாகிய AB, BC, CD, DA என்பன முறையே E, F, G, H என்பனவற்றில் இரு சமக்கூறிடப்பட்டிருக்கின்றன. EG, HFஎன்பனவற்றால் பருமன் திசைகளிற் குறிக்கப்பட்ட விசைகள் ஒருபுள்ளியிலே தாக்கினால், அவற்றின் விளைவு AC ஆல் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கப்படு மெனக் காட்டுக.

(22) ABC, A′B′C′ என்பன இரு முக்கோணங்கள். $\vec{AA'}\ \vec{BB'}\ \vec{CC'}$ என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகள் ஒரு துகளில் தாக்குகின்றன. G,G′ என்பன முக்கோணங்களின் ஈர்ப்புமையங்களானால், அவ்விசைகளின் விளைவு $3\vec{GG'}$ எனக் காட்டுக.

18 தேற்றம்

தரப்பட்டவொரு திசையில் இரு விசைகளுடைய பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம், அத்திசையில் அவற்றின் விளைவின் பிரித்த பகுதிக்குச் சமன்.

OA, OB என்பன P, Q என்னும் இரு விசைகளையும், OC என்பது அவற்றின் விளைவு R என்பதையுங் குறிக்க; ஆயின், OACB என்பது ஓரிணைகரமாகும்.



படம்-25

OX என்பது தந்த திசையாகுக.

AD, BE, CF என்பனவற்றை OXற்குச் செங்குத்தாயும், AG என்பதை CFற்குச் செங்குத்தாயும் வரைக.

OBE, ACG என்னுமிரு முக்கோணங்களுடைய பக்கங்களானவை முறையே இணையாயிருக்கின்றன.

அன்றியும், OB என்பது ACயிற்கு அளவில் சமன்.

∴ இரு முக்கோணங்களும் சர்வசமனாகும்.

∴ OE = AG = DF

எனின், OF = OD + DF

= OD + OE

ஆனால், OD, OE, OF என்பன OX என்ற திசையில், முறையே P, Q, R என்பனவற்றினுடைய பிரித்த பகுதிகளைக் குறிக்கின்றன. ஆகவே, தேற்றம் நிறுவப்படுகின்றது.

குறிப்பு :

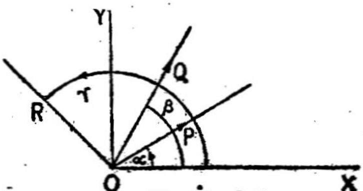
இத்தேற்றம் ஒருபுள்ளியிலே தாக்குகின்ற எத்தொகை விசைகளின் விளைவிற்கும் எளிதாக விரிவாக்கப்படலாம்.

4

19 ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்ற ஒருதளத்து விசைகள் எத்தொகையாயிருப்பினும் அவற்றின் விளைவைக் காணல்.

P, Q, R, ... என்னும் விசைகள் O விலுள்ள ஒரு துகளின்மீது தாக்குக.

O வழியாக, OX என்னும் நிலையான ஒரு கோட்டையும், OXற்குச் செங்குத்தாக OY என்னுமொரு கோட்டையும் வரைக.



படம். 26

P, Q, R......... என்னும் விசைகள் OX உடன் α, β, γ......... என்னுங் கோணங்களை உண்டாக்குக.

இவ்வதிகாரம் பிரிவு 7 இன்படி, OX, OY என்னுந் திசைகளிலே விசை Pயினுடைய கூறுகளானவை

	$P\cos\alpha$, $p\sin\alpha$ ஆகும்
இதுபோல், Qவினுடைய கூறுகள்	$Q\cos\beta$, $Q\sin\beta$,,
,, ,, R யினுடைய ,,	$R\cos\gamma$, $R\sin\gamma$,,

இது போலவே, மற்றைய விசைகளையும் பிரிக்கலாம்.

எனின், கொடுக்கப்பட்ட விசைகள்,

OXஇன் திசையில் $P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma+$......என்ற ஒரு கூறுக்கும்,

OYஇன் திசையில் $P\sin\alpha+Q\sin\beta+R\sin\gamma+$.........என்ற ஒரு கூறுக்கும் சமனாகும்.

இக்கூறுகள் முறையே X ,Y என்பனவாகுக. X, Yஇன் விளைவு Fஆகவும், அது OXற்கு θ கோணமளவில் சாய்ந்திருந்தால், முந்திய பிரிவால், நாம்பெறுவது

$$F\cos\theta=X \qquad (1)$$

$$F\sin\theta=Y \qquad (2)$$

எனின், இவற்றின் வர்க்கங் கண்டு கூட்டலால்,

$$F^2=X^2+Y^2$$

அன்றியும், வகுத்தலால், $\tan\theta=\dfrac{Y}{X}$

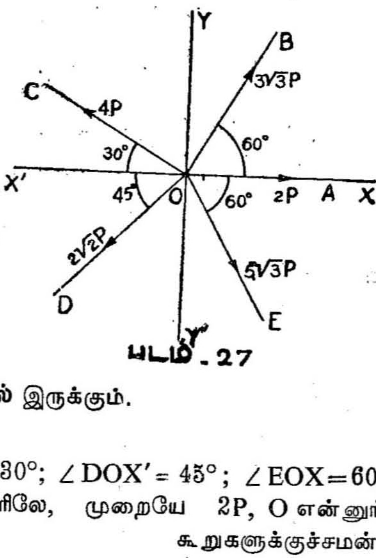
இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளும், F, θ என்பனவற்றை, (அ-து) வேண்டிய விளைவின் அளவையும், திசையையுந் தரும்.

20 உதாரணம் 1

ஒரு துகள் $2P$, $3\sqrt{3}P$, $4P$, $2\sqrt{2}P$, $5\sqrt{3}P$ என்பனவற்றுற் குறிக்கப்படும் விசைகளாலே தாக்கப்படுகின்றது. முதலாவதற்கும், இரண்டாவதற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $60°$ ஆகவும், இரண்டாவதற்கும் மூன்றுவதற்கும் இடையேயுள்ளது $90°$ ஆகவும், மூன்றுவதற்கும் நாலாவதற்கும் இடையேயுள்ளது $75°$ ஆகவும், நாலாவதற்கும் ஐந்தாவதற்கும் இடையேயுள்ள கோணம் $75°$ ஆகவுமிருக்கின்றன, இவ்விசைகளின் விளைவின் அளவையும், திசையையும் காண்க.

17S055

O என்பது துகள். இவ்வுதாரணத்தில் X'OX என்னும் கிடை அச்சை முதலாம் விசை 2Pயினது திசையோடு பொருந்தும்படி எடுத்துக்கொண்டால், எளிதாகத் தீர்வு காணலாம்.



படம் - 27

Y'OY என்பதை X'OXற்கு நிலைக்குத்துக் கோடாக வரை, இரண்டாம், மூன்றும், நாலாம், ஐந்தாம் விசைகளானவை முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றும், நாலாங்கால் வட்டங்களில் இருக்கும்.

ஆயின், $\angle BOX = 60°$; $\angle COX' = 30°$; $\angle DOX' = 45°$; $\angle EOX = 60°$

முதலாம்விசை OX,OY திசைகளிலே, முறையே $2P$, O என்னுங் கூறுகளுக்குச்சமன்.

இரண்டாம்விசை ,, ,, ,, $3\sqrt{3}P \cos 60°$, $3\sqrt{3}P \sin 60°$,, ,,

மூன்றும்விசை ,, ,, ,, $-4P \cos 30°$, $4P \sin 30°$,, ,,

நான்காம்விசை ,, ,, ,, $-2\sqrt{2}P \cos 45°$, $-2\sqrt{2}\ P \sin 45°$,, ,,

ஐந்தாம்விசை ,, ,, ,, $5\sqrt{3}P \cos 60°$, $-5\sqrt{3}P \sin 60°$,, ,,

ஆகவே, $X = 2P + 3\sqrt{3}P \cos 60° - 4P \cos 30° - 2\sqrt{2}P \cos 45°$
$+ 5\sqrt{3}P \cos 60°$

$$=2P+3\sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right)-4P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\sqrt{2}P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+5\sqrt{3}P\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2P+\frac{3\sqrt{3}P}{2}-2\sqrt{3}P-2P+\frac{5\sqrt{3}P}{2}$$

$$=2\sqrt{3}P$$

$$Y=3\sqrt{3}P\sin 60^\circ+4P\sin 30^\circ-2\sqrt{2}P\sin 45^\circ-5\sqrt{3}P\sin 60^\circ$$

$$=3\sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+4P\left(\frac{1}{2}\right)-2\sqrt{2}P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-5\sqrt{3}P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\frac{9P}{2}+2P-2P-\frac{15P}{2}=-3P$$

விசைகளின் விளைவு F ஆயின், $F=\sqrt{X^2+Y^2}$

$$=\sqrt{12P^2+9P^2}\quad=\sqrt{21}P$$

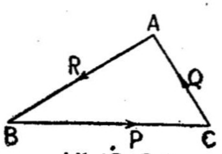
$$\tan\theta=\frac{Y}{X}=\frac{-3P}{2\sqrt{3}P}=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-{\cdot}866$$

$$\therefore\ \theta=-40^\circ\,54'$$

ஆகவே, விளைவு $=\sqrt{21}\,P$ ஆகும்; அது முதலாம் விசையோடு $-40^\circ\,54'$ அளவுள்ள கோணத்தை ஏற்படுத்தும்.

உதாரணம் 2

முக்கோணம் ABCயின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பனவற்றின் திசையிலும், அவற்றிற்கு இணையாகவும் P, Q, R என்ற அளவுள்ள விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்றன. அவைகளின் விளைவின் அளவு $(P^2+Q^2+R^2-2QR\ \cos A-2RP\ \cos B-2PQ\ \cos C)^{\frac{1}{2}}$ எனக் காட்டுக. இந்த விடையிலிருந்து 'விசை முக்கோணத்தை' வருவிக்க.



படம்-28

விசைகளை BCயின் நீளவாட்டிலும், BCக்குச் செங்குத்தாகவும் பிரிக்கவும். இத் திசைகளில் வரும் பிரித்த பகுதிகளை முறையே X, Y எனக் குறிப்போம்.

ஆயின், $X = P - Q\cos C - R\cos B$

$Y = Q\sin C - R\sin B$

$\therefore$ விளைவு $= \sqrt{X^2+Y^2}$

$= \sqrt{(P-Q\cos C-R\cos B)^2+(Q\sin C-R\sin B)^2}$

$= \sqrt{(P^2+Q^2+R^2-2PQ\cos C-2PR\cos B}$

$\quad \overline{+2QR\cos C\cos B-2QR\sin C\sin B)}$

$= \{P^2+Q^2+R^2-2PQ\cos C-2PR\cos B+2QR\cos(B+C)\}^{\frac{1}{2}}$

$= \{P^2+Q^2+R^2-2PQ\cos C-2PR\cos B-2QR\cos A\}^{\frac{1}{2}}$

இனி, $P : Q : R = a : b : c$ ஆகுக.

$\frac{P}{a} = \frac{Q}{b} = \frac{R}{c} = k$ எனின்,

$P = ka;\ Q = kb;\ R = kc$

$\therefore$ விளைவு $= k\{a^2+b^2+c^2-2ab\cos C-2ca\cos B-2bc\cos A\}^{\frac{1}{2}}$

$= k\{a^2+b^2+c^2-(a^2+b^2-c^2)-(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)\}^{\frac{1}{2}}$

$= O$

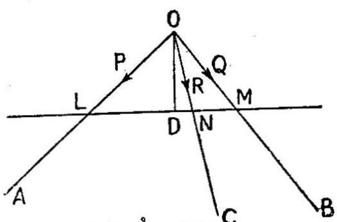
ஆகவே, மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் உள்ளன.

உதாரணம் 3

P, Q என்ற இரு விசைகளின் தாக்கக் கோடுகள் முறையே OA OB ஆகும்; அவற்றின் விளைவு Rஇன் தாக்கக்கோடு OC ஆகும். யாதேனும் ஒரு குறுக்குவெட்டி இவ்விசைகளின் தாக்கக் கோடுகளை முறையே L, M, N என்ற புள்ளிகளில் சந்தித்தால்,

$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$ எனக் காட்டுக.

OD என்பதை LMNக்குச் செங்குத்தாக வரை.



படம் - 29

OD என்னும் திசையில், P, Q என்ற இரு விசைகளுடைய பிரித்த பகுதிகளின் மொத்தம், அதே திசையில் அவற்றின் விளைவு Rஇன் பிரித்த பகுதிக்குச் சமமாவதால், (இவ்வதிகாரம், பிரிவு 18.)

$$P \cos \angle LOD + Q \cos \angle MOD = R \cos \angle NOD$$

(அ-து) $$P \cdot \frac{OD}{OL} + Q \cdot \frac{OD}{OM} = R \cdot \frac{OD}{ON}$$

(அ-து) $$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$$

பயிற்சி 2·6

1. ஒரு துகள் $2, 2\sqrt{2}, 1$ இரு. எடைகளுக்குச் சமமான ஒரு தளத்து விசைகள் மூன்றாலே தாக்கப்படுகின்றது. முதலாவது விசை கிடைத்தளத்திலும், இரண்டாவது அடிவானத்திற்கு 45° யிலும், மூன்றாவது நிலைக்குத்திலுந் தாக்குகின்றன, அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

2. $1, 2, \sqrt{3}$ இரு. எடையுள்ள விசைகள் ஒரு புள்ளி Oவில் OA, OB, OC என்னுந் திசைகளிலே தாக்குகின்றன.

$\angle AOB = 60^\circ$ ஆகவும், $\angle AOC$ ஒரு செங்கோணமாகவும் இருந்தால், அவற்றின் விளைவைக் காண்க·

3. ABCD என்பது ஒரு சதுரம். 1 இரு. எடை, 6 இரு. எடை, 9 இரு. எடை என்னும் விசைகளானவை முறையே AB, AC, AD என்னுந் திசைகளிலே தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

4. ஒருதளத்து விசைகள் 5P, 10P, 13P என்னும் மூன்றும் ஒரு துகளின் மீது தாக்குகின்றன. அவற்றுள் எவையேனும் இரண்டிற்கு இடையில் உள்ள கோணம் 120° ஆயின், அவற்றின் விளைவினுடைய அளவையும், திசையையும் காண்க,

5. ஒரு துகள் 1, 2, 3, 4 இரு. எடையுள்ள விசைகளால் தாக்கப்படுகின்றது. இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் முறையே $60^\circ, 30^\circ\ 60^\circ$ எனின், விசைகளின் விளைவையும், திசையையும் கண்டறிக.

6· ஒரு துகள் $P, 2P, 2\sqrt{2}P, 4\,P$ இரு. எடையுள்ள விசைகளால் தாக்கப்படுகிறது. இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள கோணம் முறையே $30^\circ, 90^\circ\ 105^\circ$ எனின், விசைகளின் விளைவையும், திசையையும் காண்க.

7. விசைகள் P, Q, R, S என்பன, ABCD என்னும் ஒரு சதுரத்தின் மையம் O விலுள்ள ஒரு துகளின் மீது தாக்குகின்றன. P, Q என்பன மூலைவிட்டங்கள் OA, OB என்னுந் திசைகளிலே தாக்குகின்றன. R, S என்பன AB, BC என்பனவற்றின் செங்குத்துத் திசைகளிலே தாக்குகின்றன. P: Q: R: S: : 4: 6: 5: 1 எனின், அவற்றின் விளைவினுடைய அளவையும் திசையையும் காண்க.

8. 2, 3, 4, 5, 6 என்னும் இரு. எடையுள்ள விசைகள் ஒழுங்கான அறுகோணமொன்றின் ஒரு கோணப்புள்ளியில் ஒரொழுங்கில் எடுத்த ஏனைக் கோணப்புள்ளிகளின் முகமாகத் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

9. 5, 6, 8, 9, 12 இரு. எடையுள்ள விசைகள் ஒரு புள்ளியில் முறையே கிழக்கு, வடகிழக்கு, வடக்கு, வடக்கு-வடமேற்கு, வடமேற்கு என்ற திசைகளில் செயல்படுகின்றன. அவைகளின் விளைவின் அளவையும், திசையையும் காண்க.

10. ஒரு கோலின் உச்சி கீழ்க்காணும் நான்கு திசைகளிலுள்ள கிடைப்போக்குக் கம்பிகளினால் கட்டப்பட்டு நிலையில் நிற்கிறது. அவற்றுள், வடக்கில் உள்ள கம்பியின் இழுவிசை 20 இரு. எடை; கிழக்கில் உள்ள கம்பியின் இழுவிசை 30 இரு. எடை; தென்மேற்கில் உள்ள கம்பியின் இழுவிசை 40 இரு. எடை; தென்கிழக்கில் உள்ள கம்பியின் இழுவிசை 50 இரு. எடை. இவ்விழுவிசைகளின் விளைவையும், திசையையும் காண்க.

11. ஒரு புள்ளியில் 2P, 3P, 4P என்னும் விசைகள் ஒரொழுங்கில் எடுத்த சமபக்க முக்கோணமொன்றின் பக்கங்களுக்கு இணையான திசைகளிலே தாக்குகின்றன. விளைவினுடைய அளவையுந் தாக்கக் கோட்டையுங் காண்க.

12. ABCDEF என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணம். $\vec{AB}, 2\vec{AC}, 3\vec{AD}, 4\vec{AE}, 5\vec{AF}$, என்பனவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகளின் விளைவையும், அதன் திசையையும் காண்க.

13. 7, 1, 1, 3 என்னும் இரு. எடையுள்ள விசைகள் ஒழுங்கான ஐங்கோணம் ஒன்றின் ஒரு கோணப்புள்ளியில் ஒரொழுங்கில் எடுத்த ஏனைக் கோணப்புள்ளிகளின் முகமாகத்தாக்கினால், அவற்றின் விளைவு $\sqrt{71}$ இரு. எடையெனக் காட்டுக.

14. P, Q என்ற இருவிசைகள் ஒரு புள்ளியிலே ஒன்றுக்கொன்று α கோணத்திலே சாய்ந்துள்ள இரு கோடுகள் வழிச் செயல்படுகின்றன. அவைகளின் விளைவு R ஆகும் ; அதே கோடுகள் வழிச் செயல்படும் மற்றைய இரு விசைகள் P′, Q′ என்பனவற்றின் விளைவு R′ ஆகும். இரு விளைவுகள் செயல்படும் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்

$$\sin^{-1} \frac{(PQ' - P'Q) \sin \alpha}{RR'}$$

அல்லது $\cos^{-1} \dfrac{PP' + QQ' + (PQ' + P'Q) \cos \alpha}{RR'}$ எனக் காண்பி.

3. ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்ற விசைகளின் சமநிலை நிபந்தனைகள்

(Conditions of Equilibrium of any number of forces acting upon a particle)

1. ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் எத்தொகையா யிருந்தாலும் அவற்றின் சமநிலை நிபந்தனைகளைக் காணல்

P, Q, R,.........என்னும் விசைகள் O விலுள்ள ஒரு துகளின் மீது தாக்குக. (படம்-அதிகாரம் 2-பிரிவு 18)

Oவின் வழியாக OX என்னும் நிலையான ஒரு கோட்டையும், OXற்குச் செங்குத்தாக OY என்னுமொரு கோட்டையும் வரைக.

P, Q, R.........என்னும் விசைகள் OX உடன் α, β, γ,......... என்னுங் கோணங்களை உண்டாக்குக. இவ்விசைகளை OX, OY திசைகளிலே பிரிக்கவும். அப்பொழுது அதிகாரம் 2, பிரிவு 18இன்படி, கொடுக்கப்பட்ட விசைகள், OX இன் திசையில்

$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma + \ldots\ldots = X$ என்ற ஒரு கூறுக்கும் OYஇன் திசையில் $P \sin \alpha + Q \sin \beta + R \sin \gamma + \ldots\ldots = Y$ என்ற கூறுக்கும் சமனாகும். இக்கூறுகளின் விளைவு F ஆயின்,

$$F^2 = X^2 + Y^2$$

விசைகள் சமநிலையில் இருப்பின், அவற்றின் விளைவு பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

(அ-து) $F = O$ ஆதல் வேண்டும்

(அ-து) $X^2 + Y^2 = O$

இரு மெய்க்கணியங்களுடைய (quantities) வருக்கங்களின் மொத்த மானது, ஒவ்வொரு கணியமுந் தனித்தனிப் பூச்சியமானாலன்றிப் பூச்சிய மாகாது.

$$\therefore X = O;\ Y = O$$

எனின், ஒரு துகளின்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் சமநிலையில் இருந்தால், செங்கோணங்களிலுள்ள இருதிசைகளில் அவற்றின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை தனித்தனிப் பூச்சிய மாகும்.

மறுதலையாக, செங்கோணங்களிலுள்ள இரு திசைகளில், விசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை, தனித்தனியே பூச்சியமானால், அத்துகளின்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்,

இங்கு Xஉம், Yயும் பூச்சியமானால், Fஉம் பூச்சியமாகும்.

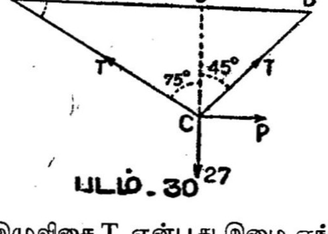
எனின், அவ்விசைகளின் விளைவு பூச்சியமாதாலால், அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்கும்,

குறிப்பு :-

மூன்று விசைகளே ஒரு துகளின்மீது தாக்கினால், சமநிலை நிபந்தனைகள் இலாமியினது தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி எளிதில் காணலாம். (அதிகாரம் 2—பிரிவு 17—உதாரணம் 2)

2 உதாரணம் 1

ஓரிழை ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்குக் கட்டப் பட்டிருக்கின்றது; அவ்விழையின்மீது கட்டின்றி வழுக்கக்கூடிய தாயிருக்கின்ற 27 இரு. எடையுள்ள ஒரு வளையம், P இரு. நிறைக்குச் சமனான ஒரு கிடைவிசையால் இழுக்கப்படுகின்றது; அது சமநிலையை அடையும்போது அவ்விழைப் பகுதிகளானவை நிலைக்குத்திற்கு 45°, 75° என்னுங் கோணங்களிற் சாய்ந்திருந்தால். P இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.



படம்-30

படத்தில் A, B என்பன இழை கட்டப் பட்டிருக்கும் புள்ளிகளாகட்டும். C என்பது வளையத்தின் நிலையைக் குறிக்கட்டும். CD என்பது ABக்குச் செங்குத்தானால், $\angle ACD = 75°$, $\angle BCD = 45°$ ஆகும்,

வளையம் வழவழப்பானதால், இழுவிசை T என்பது இழை எங்கும் ஒன்றாகவே இருக்கும்.

C என்பது சமநிலையில் இருக்கின்றமையால், அதன்மீது தாக்கு கின்ற விசைகளின் கிடைக்கூறுகள், நிலைக்குத்துக் கூறுகள் என்னும் இரண்டும் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

நிலைக்குத்தாகவும், கிடையாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$T \cos 75^\circ + T \cos 45^\circ - 27 = O \ (1)$$

$$P + T \sin 45^\circ - T \sin 75^\circ = O \ (2)$$

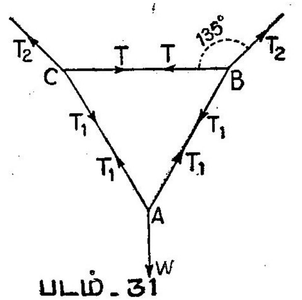
$$\therefore \ T = \frac{27}{\cos 75^\circ + \cos 45^\circ} = \frac{27}{2 \cos 60^\circ \cos 15^\circ} = \frac{27}{\cos 15^\circ}$$

$$\therefore \ P = T (\sin 75^\circ - \sin 45^\circ) = 2 \ T \cos 60^\circ \sin 15^\circ = T \sin 15^\circ$$

$\therefore \ P = 27 \ \tan 15^\circ = 27(2-\sqrt{3}) = 7.23$ இரு. எடை

உதாரணம் 2

எடையில்லாத மூன்று சமவிழைகள், ABC என்னுஞ் சமபக்க முக்கோணமொன்றை ஆக்கும்படி முடிச்சிடப்படுகின்றன. W என்னும் ஒரு எடை A யிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. அம்முக்கோணமும், எடையும் BC கிடையாக இருக்க, BC யோடு B யிலும், C யிலும் ஒவ்வொன்றும் 135° கோணத்திலுள்ள இரண்டு இழைகளினாலே தாங்கப் பட்டால், BC யிலுள்ள இழுவிசை $\frac{W}{6}(3-\sqrt{3})$ எனக் காட்டுக.



படம் - 31

BC யில் உள்ள இழுவிசை T எனக் கொள்வோம். படத்தின் சீரமைப்பின் காரணமாக, AB, AC யில் இழுவிசை சமமாகும். இதை T_1 எனக் குறிப்பிடு வோம்.

இதேபோல் தாங்கிக்கொண்டிருக் கும் B, C யிலுள்ள இழைகளின் இழு விசை சமமாகும். இதை T_2 எனக் கொள்வோம்.

A யில் உள்ள விசைகளை, நிலைக்குத்தாகப் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$2 \ T_1 \cos 30^\circ = W \quad (1)$$

$$\therefore \ T_1 = \frac{W}{\sqrt{3}}$$

முழு அமைப்பின் சமநிலை காரணமாக, எல்லா விசைகளையும் நிலைக்குத்துத் திசையில் பிரிப்பின், நாம் பெறுவது

$$2\,T_2 \sin 45^\circ = W \quad (2)$$

$$(\text{அ-து})\; T_2 = \frac{W}{\sqrt{2}}$$

*B*யின் தாக்குகின்ற விசைகளுடைய கிடைக்கூறுகளைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்த, நாம் பெறுவது

$$T + T_1 \cos 60^\circ = T_2 \cos 45^\circ \quad (3)$$

$$(\text{அ-து})\; T + \frac{T_1}{2} = \frac{T_2}{\sqrt{2}}$$

T_1, T_2க்குப் பிரதியீடு செய்ய, நாம் பெறுவது

$$T + \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W}{2}$$

$$\therefore T = \frac{W}{2} - \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}}$$

$$= W\frac{(3-\sqrt{3})}{6}$$

வேறொரு வழி :—

Bயில் தாக்கும் விசைகளுக்கு, இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, மேலே உள்ள சமன்பாடுகள் (2), (3) க்குப் பிரதியாகச் சமன்பாடுகள் பெறலாம்.

இலாமியின் தேற்றத்தின்படி

$$\frac{T}{\sin 165^\circ} = \frac{T_1}{\sin 135^\circ} = \frac{T_2}{\sin 60^\circ}$$

$$(\text{அ-து})\frac{T}{\sin 15^\circ} = \frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 60^\circ}$$

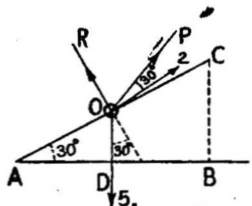
$$\therefore T = \frac{T_1 \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{W}{\sqrt{3}}\,\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{W(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{W(3-\sqrt{3})}{6}$$

உதாரணம் 3

5 இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் அடிவானத்திற்கு 30°இல் சாய்ந்துள்ள ஒரு வழுவழுப்பான தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்பொருள் இரு விசைகளாலே தாக்கப்படுகின்றது. அவற்றுள் ஒன்று 2 இருத்தலுக்குச் சமனாய், அத்தளத்திற்கு இணையாய் மேன்முகமாகத் தாக்குகின்றது. மற்றையது P யிற்குச் சமனாய் அத்தளத்தோடு 30° என்னுங் கோணத்திலே தாக்குகின்றது. Pஐயும் அத்தளத்தின் எதிர்த் தாக்கத்தையுங் காண்க.

AC என்பது சாய்தளமாகவும், AB என்பது Aயின் வழியாகச் செல்லும் கிடைக்கோடாகவும், OD என்பது நிலைக் குத்துக் கோடாகவும் இருக்க, R என்பது தளத்தின் எதிர்த்தாக்கம்; தளத்தினுடைய நீளவாட்டிலும், செங்குத்தாயும் விசைகளைப் பிரிக்க, நாம் பெறுவன



படம் - 32

$$2+P\cos 30^\circ=5\sin 30^\circ \text{ (i)} \quad R+P\sin 30^\circ=5\cos 30^\circ \text{ (ii)}$$

(அ-து) $2+\frac{P\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}$; $R+\frac{P}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$

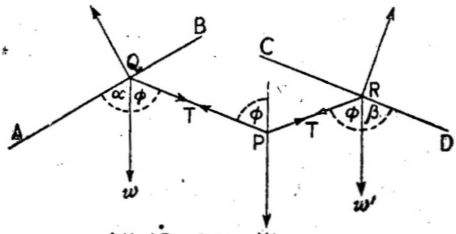
எனவே, $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ இரு. எடை; $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$ இரு. எடை.

உதாரணம் 4

ஓர் இலேசான இழையின் முனைகள், ω, ω' என்னும் எடையுள்ள இரு வழுவழுப்பான வளையங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அந்த இழை, அதில் வழுக்கக்கூடிய W என்னும் எடையுள்ள வழுவழுப்பான மூன்றாவது வளையமொன்றையும் தூக்கி நிற்கிறது. ω, ω' என்ற வளையங்கள் நிலைக்குத்துக்கு α, β என்னும் கோணங்களில் சாய்ந்துள்ள நிலையான இரு கோல்களில் கட்டின்றி வழுக்கக் கூடியவையாய் இருக்கின்றன. இழையின் பகுதிகள் நிலைக்குத்துடன் கோணம் ϕ உண்டாக்கினால், சமநிலையின் பொழுது

$$\cot\phi : \tan\beta : \tan\alpha = W : W+2\omega' : W+2\omega$$

எனக் காட்டுக,



படம் - 33

W, ω, ω' என்ற எடையுள்ள வளையங்கள் முறையே P, Q, R என்க.

P என்ற வளையத்தில் தாக்கும் விசைகளை நிலைக்குத்தாகப் பிரிப்பின், நாம் பெறுவது,

$$2T \cos \phi = W \quad (1)$$

மேலும், Q என்ற வளையத்தில் தாக்கும் விசைகளை, BA என்ற கோலின் நீளவாட்டில் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\omega \cos \alpha + T \cos (\alpha + \phi) = O \ (2)$$

(1), (2) சமன் பாடுகளில் இருந்து T யை அகற்றி நாம் பெறுவது

$$2\,\omega \cos \alpha \cos \phi + W \cos (\alpha + \phi) = O$$

அல்லது. $(2\,\omega + W) \cot \phi = W. \tan \alpha$

இம்மாதிரியே, வளையம் R ஐக் கருதி,

$(2\,\omega' + W) \cot \phi = W \tan \beta$ எனப் பெறலாம்.

இவற்றிலிருந்து நமக்கு வேண்டிய விடைகிட்டும்.

பயிற்சி 3

1. மூன்று இலேசான இழைகள் AB, BC, AB என்பன உச்சி C ஆகவுள்ள இரு சமபக்க முக்கோணமொன்றை ஆக்குமாறு ஒருமித்து முடிச்சிடப்படுகின்றன. W என்னுமொரு எடை C யிலிருந்து தொங்க விடப்படுகின்றது. அம் முக்கோணமும், எடையும், A, B என்பனவற்றிலுள்ள கோணங்களை இருசமக் கூறிடும் இழுவிசைகளால் AB என்பது கிடையாக இருக்குமாறு தாங்கப்பட்டால், இழை AB யினது இழுவிசையைக் காண்க.

2. தன்னுடைய கோணங்களுள் ஒன்று $120°$ ஆகவுள்ள ஒரு சாய்சதுர வடிவமான ஒரு சீர்த்தளத் தட்டொன்று அச்சாய்சதுரத்தின் ஒரு பக்கங் கிடையாக இருக்கும்வண்ணம் மூலை விட்டங்களுடைய திசைகளிலே மையத்திற் பிரயோகிக்கப்பட்ட இரு விசைகளாலே தாங்கப்படுகின்றது. அவ்விசைகள் P, Q என்பனவாயும், அவற்றுள் P என்பதே பெரியதாயுமிருந்தால், $P^2 = 3\,Q^2$ எனக் காட்டுக.

3. 6 விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்கிச் சமநிலையில் இருக்கின்றன. அடுத்தடுத்துள்ள விசைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் ஒவ்வொன்றும் 60° ஆகும். விசைகளுள் நான்கு முறையே 5, 10, 8, 12 இரு. எடை அளவு உடையனவாய் இருக்கின்றன. மற்றைய இரு விசைகளின் அளவுகளைக் கணக்கிடுக.

4. 21 செ. மீ நீளமுள்ள ஒரு இழையின் முனைகள், ஒரு கிடைத் தளத்தில் 15 செ. மீ அப்பாற்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகளுக்குக் கட்டப் பட்டிருக்கின்றன. 100 கிராம் எடையைத் தூக்கிக்கொண்டிருக்கும் ஒரு சிறு வளையம் அவ்விழையின்மீது கட்டின்றி வழுக்கக்கூடியதாயிருக் கின்றது. அவ்வளையம், ஒரு கிடைவிசை F ஆல் தாக்கப்பட்டு, சம நிலையை அடையும்போது, அவ்விழையின் நெருங்கிய முனையிலிருந்து 9. செ. மீ. தூரத்தில் காணப்பட்டால், இழையின் இழுவிசையையும், F இன் அளவையும் காண்க.

5. ஓரிழை ஒரு கிடைத்தளத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்குக் கட்டப்பட்டிருக்கின்றது. அவ்விழையின் மீது கட்டின்றி வழுக்கக் கூடியதாயிருக்கின்ற W இரு. எடையுள்ள ஒரு வளையம் P இரு. எடைக்குச் சமனான ஒரு கிடைவிசையால் இழுக்கப்படுகிறது. அது சமநிலையை அடையும்போது அவ்விழைப் பகுதிகளானவை நிலைக்குத் திற்கு 30°, 60° என்னுங் கோணங்களிற் சாய்ந்திருந்தால், இழையின் இழுவிசையையும், P யையும் கண்டறிக.

6. ABCD என்பது ஒரு சதுரமாயின், AB, BC, CD, DA, AC என்னுந் திசைகளில் முறையே P, 2P, 3P, 4P, $2\sqrt{2}P$ என்ற விசைகள் ஒரு புள்ளியில் தாக்குகின்றன. அவை சமநிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

7. இலேசான ஒரு கட்டிழையினுடைய முனைகள் இரண்டு நிலை யான புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டிருக்க, அவ்விழையினுடைய வெவ்வேறு புள்ளிகளிலே சம எடைகள் இணைக்கப்பட்டால், அதனால் அவ்விழையில் ஏற்படும் அடுத்தடுத்துள்ள பகுதிகளின் சரிவுகள் (ஒவ்வொரு பகுதியின் அடிவானச்சாய்வின் தான்சன்கள்) ஒரு கூட்டல் விருத்தியாகும் எனக் காட்டுக.

8. ABCD என்னும் ஓரிழையானது A, D என்னும் நிலையான புள்ளிகள் இரண்டிற்கு இணைக்கப்பட்டு B,C என்பனவற்றில் W என்னும் இரு சம எடைகள் முடிச்சிடப்பட்டு, AB, CD என்னும் பகுதிகள் நிலைக் குத்திற்கு முறையே 30°, 60° என்னுங் கோணங்களிற் சாய்ந்து கிடக்க

ஓய்விலிருக்கிறது. அவ்விழையினுடைய பகுதிகளின் இழு விசைகளையும் நிலைக்குத்திற்கு BC யின் சாய்வையுங் காண்க.

9. l செ. மீ. நீளமுடைய ஓரிழையின் முனைகள், ஒரேமட்டத்தில் ஒன்றுக்கொன்று a செ. மீ. ($\leqslant l$) தூரத்திலுள்ள A, B என்ற இரு புள்ளிகளுக்குக் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. அவ்விழையின் மீது கட்டின்றி வழுக்கக்கூடியதாயிருக்கின்ற W இரு. எடையுள்ள ஒரு வழவழப்பான வளையம், W இரு. எடையுள்ள ஒரு கிடைவிசையால் இழுக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றது. அவ்விழையிலுள்ள இழுவிசை

$$\frac{W l}{\sqrt{2l^2 - a^2}}$$ எனக் காட்டுக.

10. ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள 2P எடையுடைய பொருள், அத்தளத்திற்கு இணையாய் அதைத் தாக்குகின்ற P என்னும் விசையாலும், ஒரு கிடைவிசை P யாலும் சமநிலையில் வைக்கப்படுகின்றது; அத்தளத்தின் அடி அதனுயரத்திற்கு என்ன விகிதத்தில் உள்ளதெனக் காண்க; அன்றியும், அத்தளத்தின் எதிர்த்தாக்கத்தையும் காண்க.

11. ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு எடை, அத்தளத்திற்குச் சார்ந்துள்ள ஒரு விசையாலே தாங்கப்படுகின்றது. அந்த எடை, விசை, எதிர்த்தாக்கவிசை என்பன 4, 3, 2 என்பன போலிருந்தால், அத்தளத்தின் சாய்வையும், அவ்விசையினது திசையையுங் காண்க.

12. ஒரு சாய்தளத்தில் உள்ள 10 இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருளின்மீது மேன்முகமாகத் தாக்கிச் சமநிலையில் வைக்கும் விசையும், அத்தளத்தின் எதிர்த்தாக்கமும் அப்பொருளினது எடையும் கூட்டல் விருத்தியில் இருக்கின்றனவென்றால் அப்பொருளைச் சமநிலையில் வைக்கும் விசையைக் காண்க.

13. P என்னும் ஒரு விசை ஒரு சாய்தளத்திற்கு இணையாகத் தாக்கிக்கொண்டும், W என்னும் எடையுடைய நிறையைத் தாங்கிக் கொண்டும், அத்தளத்தின்மீது R என்னும் அமுக்கத்தை உண்டாக்கினால், அதே விசைத்திறன் கிடையாகத் தாக்கிக்கொண்டும், R என்னும் எடையுடைய நிறையைத் தாங்கிக்கொண்டும் அத்தளத்தின்மீது W என்னும் அமுக்கத்தை உண்டாக்குமெனக் காட்டுக.

14. சமவுயரமுள்ள இரு சாய்தளங்களின்மீது இரண்டு எடைகள் பொது உச்சிக்கு மேலாக, அத்தளங்களுக்கு இணையாகச் செல்லும் ஓரிழையினாலே தாங்கப்படுகின்றன, ஒரு தளத்தின் நீளம் அதனுயரத்தின் இரு மடங்கு; மற்றைத் தளத்தின் நீளம் அதனடியின் இருமடங்கு

ஒரு தளத்தின் எதிர்த் தாக்கம் மற்றையதன் எதிர்த்தாக்கத்தின் மும் மடங்கெனக் காட்டுக.

15. படுகை மட்டத்திற்கு α என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்த ஒரு தளத்தின் மீதுள்ள ஒரு எடை, படுகை மட்டத்திற்கு γ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஓரிழையினால் தாங்கப்படுகிறது. தளத்தின் தின் சாய்வு β வாக மிகுதியாக்கப்பட்டு, இழையின் சாய்வு மாற்றுமல் இருந்தால் இழையின் இழுவிசை இரட்டிப்பாகின்றது.

எனின், $\cot\alpha - 2\cot\beta = \tan\gamma$ என நிறுபி.

16. படுகை மட்டத்திற்கு 60° சாய்ந்துள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மீது 2இரு. எடையுள்ள ஒரு நிறை, இரு சம விசைகளினுல் தாங்கப்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கிறது. இதில் ஒரு விசை கிடையாகவும், மற்றொன்று சாய்தளத்திற்கு இணையாக மேல் முகமாகவும் செயல்பட்டால், அவற்றின் அளவுகளைக் காண்க.

4. இணைவிசைகள்
(Parallel forces)

1 இதுவரை ஒரு துகளின் மீதோ அல்லது துகளைப் போலக் கருதக் கூடிய பொருளின் மீதோ செயற்படும் விசைகளின் விளைவை எவ் வாறு காணலாம் என்று காட்டினோம்.

இனி, கட்டிறுக்கப் பொருள்கள் மீது செயற்படும் விசைகளைப் பற்றிக் கவனிப்போம்;

தினசரி வாழ்க்கையில் பொதுவான நிலையியல் பிரச்சினைகளில் இணை விசைகள் இடைவிடாது தோன்றுகின்றன,

ஆகவே, இவ்வதிகாரத்தில் இணைவிசைகளின் சேர்க்கையைப் பற்றி ஆராய்வோம்.

இரு இணைவிசைகள் ஒரே திசையிலே தாக்கும்பொழுது, அவை ஒத்த (like) விசைகள் எனப்படும்.

எதிர்த் திசைகளிலே தாக்கும் இணைவிசைகள் எதிர் (unlike) விசைகள் அல்லது ஒவ்வா விசைகள் எனப்படும்.

2 ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்குகின்ற இரண்டு விளைவைக் காணல்

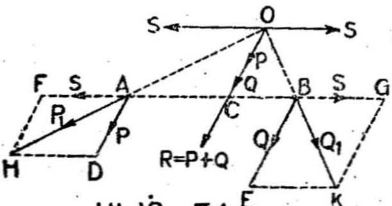
வகை I அவை ஒத்த விசைகளாகுக;

P, Q என்னும் இரண்டு இணைவிசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொரு ளின் A, B என்னும் புள்ளிகளிலே தாக்குகின்ற விசைகளாகுக.

அவை AD, BE, என்னுங் கோடுகளாற் குறிக்கப்படுக. AB ஐ ஒன்று சேர். A, B என்பனவற்றில், ஒவ்வொன்றும் S இற்குச் சமனய், முறையே BA, AB என்னுந் திசைகளிலே இரண்டு சமனன எதிர் விசைகளைப் பிரயோகிக்கவும்· இவ்விசைகள் AF, BG என்பனவற்ருற் குறிக்கப்படுக .

இந்த இரண்டு விசைகளும் ஒன்றையொன்று சமப்படுத்தி, அப்பொருளின் சமநிலையில் யாதொரு விளைவையுந் தராது நிற்கும்.

ADHF, BEKG என்னும் இணைகரங்களையும் பூர்த்திசெய்· இவற்றின் மூலைவிட்டங்களாகிய HA, KB என்பன O வில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக.



படம் - 34

AD அல்லது BE க்கு இணையாக OC என்பனவற்றை, AB யை Cயில் சந்திக்குமாறு வரைக.

A யிலுள்ள P, S என்ற விசைகளின் விளைவு A H என்பதால் குறிக்கப்படும். இதை P_1 எனக் கொள்க.

இதேபோல் B யிலுள்ள Q, S என்னும் விசைகளின் விளைவு BK ஆல் குறிக்கப்படும். இதை Q_1 எனக் குறிக்க.

P_1 என்னும் விசையின் பிரயோகப் புள்ளியை A யிலிருந்து அதே கோட்டிலுள்ள O விற்கு மாற்றவும்.

இதேபோல், Q_1 என்னும் விசையின் பிரயோகப் புள்ளியையும் Bயிலிந்து O விற்கு மாற்றவும்.

[நாம் எடுத்துக்கொண்டது கட்டிறுக்கப் பொருளாதலால், இவ்வாறு ஒரு விசையின் செயற்படு புள்ளியை அதன் கோட்டின் மீதுள்ள எந்த இடத்திற்கும் மாற்றலாம். [அதிகாரம் 1-பிரிவு 18]

O விலுள்ள P_1 என்னும் விசையை AF க்கு இணையாக S என்னும் ஒரு விசையாகவும், OC திசையில் P என்னுமொரு விசையாகவும் பிரிக்கலாம்.

இதுபோல, O விலுள்ள Q_1 என்னும் விசையை BGக்கு இணையாக S என்னும் ஒன்றும், OC திசையில் Q என்னும் ஒன்றும் ஆகிய இரு விசைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

இப்பொழுது Oவிலே தாக்குகின்ற Sஎன்னும் இரண்டு விசைகளும் சமனுமெதிருமாயிருப்பதால், சமநிலையில் இருக்கின்றன. ஆகவே, இவற்றை நீக்கிவிடலாம். இதன்பிறகு எஞ்சிநிற்பது, OC என்னும் கோட்டில் O என்னும் புள்ளியில் செயற்படும் P, Q விசைகளே யாகும்.

இவற்றின் விளைவு P+Q ஆகும். இதன் செயற்படு புள்ளியை C க்கு மாற்றவும்.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட P, Q என்ற ஒத்த இணைவிசைகளின் விளைவு (P+Q) விற்குச் சமமாய், AB யில் உள்ள C என்னும் புள்ளியில் P, Q என்பனவற்றினுடைய திசைகளுக்கு இணையாய்ச் செயல்படும்.

புள்ளி C யின் நிலையைக் கண்டறிதல் :

அமைப்பின்படி, OCA என்ற முக்கோணமும் ADH என்ற முக்கோணமும் வடிவொத்தனவாகும்.

$$\therefore \frac{OC}{CA} = \frac{AD}{DH} = \frac{P}{S}$$

$$\therefore P.\,CA = S.\,OC \quad \text{(i)}$$

மேலும், OCB, BEK என்ற முக்கோணங்களும் ஒத்த வடிவினவாகும்.

$$\therefore \frac{OC}{CB} = \frac{BE}{EK} = \frac{Q}{S}$$

$$\therefore Q.\,CB = S.\,OC \quad \text{(ii)}$$

(i), (ii) என்பனவற்றிலிருந்து, நாம்பெறுவது

$$\mathbf{P.\ CA = Q.\,CB.} \quad \text{(i)}$$

ஆகவே, $\frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$

(அ-து) C என்பது AB ஐ P, Q என்ற விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கின்றது.

மேலும், $\frac{P}{CB} = \frac{Q}{CA} = \frac{P+Q}{CB+CA} = \frac{P+Q}{AB} = \frac{R}{AB}$

(அ-து) $\frac{P}{CB} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$ (2)

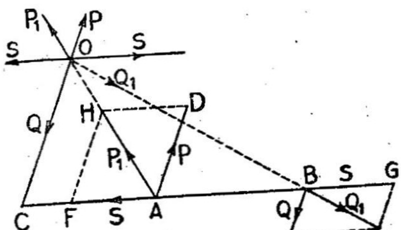
[(P+Q) = R எனக்கொள்க]

கிளை. தே :

மூன்று இணைவிசைகள் சமநிலையில் இருந்தால், ஒவ்வொரு விசையும் மற்ற இரண்டுக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்திற்கு விகிதசமமாய் இருக்கும்.

வகை II அவ்விசைகள் எதிர் இணைவிசைகளாகுக.

P, Q என்பன ஒரு பொருளில் A, B என்னும் புள்ளிகளிலே தாக்கும் எதிர் இணைவிசைகளாகுக. $P > Q$ எனக் கொள்க. இவை AD, BE என்னுங் கோடுகளாற் குறிக்கப்படுக.



படம் - 35

A, B என்பனவற்றில் ஒவ்வொன்றும் S க்குச் சமனை BA, AB என்னுந் திசைகளிலே தாக்குகின்ற இரண்டு சமமான எதிர் விசைகளைப் பிரயோகிக்கவும். இந்த விசைகள் AF, BG என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படுக. அவை ஒன்றை யொன்று சமப்படுத்தி அப்பொருளின் சமநிலையில் யாதுமொரு விளைவையுந் தராதிருக்கும்.

ADHF, BEKG என்னும் இணைகரங்களைப் பூர்த்தி செய்.

AH, KB என்னும் மூலைவிட்டங்களை O வில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. [P,Q என்பவைகள் சமமாய் இராததால் இம்மூலை வரைகள் சந்திக்கும்]

AD அல்லது BE க்கு இணையாய், OC என்பதை AB (இன் நீட்சி) யை C யில் வெட்டுமாறு வரைக.

A யில் செயற்படும் P, S என்னும் விசைகளின் விளைவு AH ஆல் குறிக்கப்படும். இதை P_1 என்று குறிப்போம். இதேபோல, B யில் தாக்குகின்ற Q, S என்னும் விசைகளின் விளைவு BK ஆல் குறிக்கப்படும். இதை Q_1 என்று குறிப்போம்.

P_1, Q_1, என்பனவற்றின் செயற்படு புள்ளிகளை O என்ற ஒரே புள்ளிக்கு மாற்றவும்.

O வில் உள்ள P_1, என்னும் விசையை AF க்கு இணையாயுள்ள S என்ற ஒன்றும், நீட்டிய LO என்னுந் திசையிலுள்ள P என்னும் ஒன்றுமாகிய இரு விசைகளாகப் பிரிக்கலாம்.

இதேபோல Oவில் உள்ள Q_1, என்னும் விசையை BGக்கு இணையாயுள்ள S என்ற ஒரு விசையாகவும், OC திசையிலுள்ள Q என்னும் ஒரு விசையாகவும் பிரிக்கலாம்.

இப்பொழுது Oவில் தாக்குகின்ற S அளவுள்ள இரு விசைகள் சமனுமெதிருமாயுள்ளன. ஆகவே, இந்த விசைகள் சமநிலையில் உள்ளன. இவைகளை நீக்கிவிட்டால், எஞ்சிய விசைகள் LO திசையில் Pயும் OL திசையில் Q வும் ஆகும்.

இவற்றுள் P பெரிதாகையால், இவைகளின் விளைவு P யின் திசையில் (P—Q) ஆகும். இதன் செயற்படு புள்ளியை O விலிருந்து C க்கு மாற்றவும்.

ஆகவே, கொடுத்த P, Q என்னும் எதிர் இணைவிசைகளின் விளைவு (P—Q) க்குச் சமமாய், AB யில் உள்ள Cஎன்னும் புள்ளியில் CO திசையில் (அ–து) P, Q என்ற விசைகளுக்கு இணையாய்ச்செயல்படும்.

C என்னும் புள்ளியின் நிலையைக் காணல்.

முக்கோணங்கள் OCA, HFA என்பன வடிவொத்தன.

$$\therefore \frac{OC}{CA} = \frac{HF}{FA} = \frac{AD}{AF} = \frac{P}{S}$$

$\therefore$ P. CA=S. OC (i)

மேலும், முக்கோணங்கள் OCB, BEK என்பன ஒத்த வடிவினவாகையால்,

$$\frac{OC}{CB} = \frac{BE}{EK} = \frac{Q}{S}$$

$\therefore$ Q·CB=S·OC (ii)

ஆகவே (i), (ii) என்பனவற்றிலிருந்து, நாம் பெறுவது

P.CA=Q.CB (i)

$$\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{Q}{P}$$

(அ-து) C என்பது AB யை P, Q என்ற விசைகளினுடைய நேர்மாறு விகிதத்தில் வெளிப்புறத்தில் பிரிக்கின்றது.

மேலும் $\frac{P}{CB} = \frac{Q}{CA} = \frac{P-Q}{-CA} = \frac{P-Q}{AB} = \frac{R}{AB}$ [விளைவு P—Q=R எனக் கொள்க.]

$$\therefore \frac{P}{CB} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB} \quad (2)$$

மேற்கண்ட இரு வகைகளையும் பின்வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம்.

P, Q என்னும் இரண்டு இணைவிசைகள் ஒரு பொருள்மீது முறையே A B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்கினால்,

(i) விசைகள் ஒத்தவையாயின், விளைவின் அளவு அவற்றின் கூட்டுத் தொகையாகும். அவை எதிர் இணைவிசைகளாயின், விளைவின் அளவு அவற்றின் வித்தியாசமாகும்.

(ii) விளைவின் பிரயோகப்புள்ளி P. AC = Q. BC ஆகும்படி, ABயில் உள்ள C என்னும் ஒரு புள்ளியாகும்.

இணைவிசைகள் ஒத்தவையாயின், C என்பது AB யை P, Q என்ற விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும். ஆதலின், விளைவு இரு விசைகளுக்கு இடையே பெரிய விசைக்கருகில் இருக்கும். இணைவிசைகள் எதிர் விசைகளாயின் C என்பது AB யை P, Q என்ற விசைகளின் நேர்மாறு விகிதத்தில் வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும். ஆதலின், விளைவு இரு விசைகளுக்குப் புறம்பாகப் பெரிய விசைக்கு அருகில் இருக்கும்.

(iii) விளைவின் தாக்கக்கோடு கூற்று விசைகளுடைய தாக்கக்கோடுகளுக்கு இணையானதாகும். அன்றியும், கூற்றுவிசைகள் ஒத்தவையாயின், விளைவின் திசை அவ்விரு விசைகளுடைய திசையேயாகும். அவை ஒவ்வாதவையாயின் அதனுடைய திசை பெரியதன் திசையாகும்.

3 மேற்கூறிய வமைப்புத் தவறும் வகை:-

மேலுள்ள பிரிவில் இரண்டாம் வகைக்குரிய படத்தில், P, Q என்னும் விசைகள் சமமாயின், HFA, KGB என்னும் முக்கோணங்கள் சர்வ சமமாகும். அதனால், $\angle FAH = \angle GBK$

ஆகவே, AH; KB என்னும் கோடுகள் சமாந்தரமாய், ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கமாட்டா.

எனின், அமைப்புத் தவறும்.

ஆகையால், இரண்டு சமமான எதிர் இணை விசைகளுக்குச் சமமாய் ஒரு தனி விசையுமில்லை.

இவ்வகையை அதிகாரம் 6 இல் மேலும் ஆராய்வோம்.

வேறொருமுறை

வகை 2, (2) லிருந்து

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{CA} = \frac{P-Q}{AB}$$

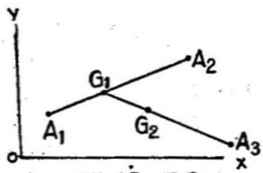
$$\therefore \quad (P-Q)\,CA = Q.\,AB$$

$$\therefore \quad CA = \frac{Q.\,AB}{P-Q}$$

$P = Q$ எனின், $P - Q = O$; ஆகவே, CA முடிவிலி யாகும்,
மேலும், விளைவின் அளவு $= O$

ஆதலால், இரண்டு சமமான எதிர் இணைவிசைகளுக்குச் சமமாய் ஒரு தனி விசையுமில்லை.

4 இணைவிசைத்தொகுதி யொன்றின் மையம் (Centre of parallel forces)



படம்-36

$P_1, P_2, P_3; \ldots\ldots P_n$ என்ற இணை விசைகள் $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ என்ற n புள்ளிகளில் தாக்கவும், இப்புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x_1, y_1), $(x_2, y_2); \ldots\ldots (x_n, y_n)$ என்பன வாகுக.

A_1, A_2 வில் செயல்படும் P_1, P_2 என்னும் இணைவிசைகளின் விளைவு $P_1 + P_2$ ஆகும். இது $A_1 A_2$ என்னும் கோட்டை, $\frac{A_1 G_1}{G_1 A_2} = \frac{P_2}{P_1}$ எனப் பிரிக்கும் G_1 என்ற புள்ளியில் செயல்படும்.

இயல்முறை வடிவ கணிதத்தின்படி, G_1 என்பதின் ஆயத் தொலைகளாவன

$$\frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}, \ \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2} \quad (P_1 + P_2 \neq O)$$

இணைவிசைகள் எத்திசையில் செயற்பட்டாலும், G_1 என்பது $A_1 A_2$ வில் ஒரு நிலையான புள்ளியாகும்.

மேற்கூறிய விளைவை $A_3(x_3, y_3)$ யில் தாக்கும் P_3 என்னும் இணைவிசையுடன் சேர்த்து விளைவு காணில், அவ்விளைவு $P_1 + P_2 + P_3$ ஆகும்.

இது G_1A_3 யை $\dfrac{G_1G_2}{G_2A_3} = \dfrac{P_3}{P_1 + P_2}$ எனப் பிரிக்கும் G_2 என்னும் புள்ளியில் தாக்கும். G_2 இன் ஆயத்தொலைகள்

$$\frac{P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3}{P_1 + P_2 + P_3}, \quad \frac{P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3}{P_1 + P_2 + P_3}$$

$(P_1 + P_2 + P_3 \neq O)$

இவ்வாறு, ஒவ்வொரு விசையாகக் கூட்ட வரும் விளைவின் அளவு $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$ என்ருகும். இவ்விளைவு தாக்கும் புள்ளி $A_1, A_2, A_3 \ldots$ என்ற புள்ளிகளைப்பற்றி ஒரு நிலையான புள்ளியாகும். அந்த விளைவு தாக்கும் புள்ளியை $G(\bar{x}, \bar{y})$ எனக் குறித்தால்

$$\bar{x} = \sum_1^n P_r x_r \Big| \sum_1^n P_r ; \quad \bar{y} = \sum_1^n P_r y_r \Big| \sum_1^n P_r$$

இந்தப் புள்ளி G, **இணைவிசைத் தொகுதியின் மையம்** என வழங்கப்படும்.

குறிப்பு : இணை விசைகளின் விளைவினது நிலையைக் காண்பதற்குரிய அமைப்பு அவ்விசைகளின் பிரயோகப் புள்ளிகளையும், அளவுகளையுமே பொருந்தியிருப்பதால், அவ்விளைவினது தாக்கப்புள்ளி அவ்விசைகளுடைய பொதுவான திசையைப் பொருந்தியதாய் இராது என்பது தெளிவு.

ஆகவே, இணைவிசைகளின் திசை எதுவாக இருப்பினும், மேற்கூறிய அமைப்பின்படி கிட்டுவது G என்னும் ஒரே புள்ளியே யாகும்.

5. உதாரணம் :—

P, Q என்ற இரு ஒத்த இணைவிசைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது A, B என்னும் புள்ளிகளில் தாக்குகின்றன. P யையும் Q, வையும் ஒன்றுக்கொன்று இடமாற்றம் செய்தால், இதனுல் விளைவின் தாக்கப்புள்ளியில் ஏற்படும் இடப்பெயர்ச்சியின் தூரம் a எனில்,

$$a = \frac{P-Q}{P+Q} AB$$ எனக் காட்டுக

P, Q என்பனவற்றின் விளைவு ABயில் C என்னும் புள்ளியில் தாக்கட்டும்.

அப்பொழுது, $P.AC = Q.CB$

(அ-து) $\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}$

$$\therefore \frac{P}{Q} + 1 = \frac{CB}{AC} + 1$$

$$\frac{P+Q}{Q} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore AC = \frac{AB}{P+Q} \cdot Q$$

P யையும், Q வையும் இடமாற்றம் காரணமாக விளைவு ABயில் C′ என்ற புள்ளியில் செயல்பட்டால்,

அப்பொழுது, $AC' = \frac{AB}{P+Q} . P$

ஆகவே, $a = AC' - AC = \frac{AB}{P+Q} . P - \frac{AB}{P+Q} . Q$

$$= \frac{P-Q}{P+Q} . AB$$

பயிற்சி 4

(1) இரு இணைவிசைகள் 10 அடி நீளமுள்ள ஒரு சீர்நேர் கோலொன்றின் முனைகளில் செயற்படுகின்றன. அவை ஒத்த இணை விசைகளாக இருப்பின், அவற்றின் விளைவு 80 இரு, எடையாகும்; அவை எதிர் இணை விசைகளாக இருப்பின் அவற்றின் விளைவு 20 இரு, எடையாகும். அவ்விருவிசைகளையும், அவற்றின் விளைவுகளின் தாக்கப் புள்ளிகளையும் காண்க.

(2) 6 அடி நீளமுள்ள ஒரு இலேசான கிடைக்கோலின் முனைகள் இரு தாங்கல்கள் மீது நிற்கின்றன. 60 இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் அக்கோலில், அதன் ஒரு முனையிலிருந்து $2\frac{1}{2}$ அடி தூரத்தில் தொங்குகின்றது,

தாங்கல் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் உள்ள எதிர்த் தாக்கத்தைக் காண்க. ஒரு தாங்கல் 10 இரு. எடைக்குச் சமனான அமுக்கத்தையே தாங்குமானால், அப்பொருள் மற்றைத் தாங்கலிலிருந்து தொங்கவிடக் கூடிய மிகப் பெரிய தூரத்தைக் காண்க.

(3) P, Q என்பன ஒத்த இணை விசைகள். இதில் Q என்ற விசையை அதற்கு இணையாக x அளவு தூரம் நகர்த்தப்பட்டால், இதன் காரணமாக, P, Q என்ற விசைகளின் விளைவு $\frac{Qx}{P+Q}$ அளவு தூரம் நகரும் எனக் காண்பி.

(4) இரண்டு இணைவிசைகள் P, Q என்பன ஒரு பொருளினுடைய கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகளிலே தாக்குகின்றன. Q என்ற விசை $\frac{P^2}{Q}$ என்ற விசையாக மாற்றப்பட்டால், இதனால் கிடைக்கும் விளைவின் தாக்கக்கோடு, தனியே விசைகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிப் பெறும் தாக்கக் கோடேயாகுமெனக் காட்டுக.

(5) P, Q, R என்ற ஒத்த இணைவிசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் தளத்திற்குச் செங்குத்தாக முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் தாக்குகின்றன. அவ்விசைகளின் விளைவு சுற்று வட்ட மையத்தின் வழியே சென்றால்,

$$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$$ எனக் காட்டுக.

(6) பாரமான ஒரு சீரான கோலொன்று 4 அடி நீளமுள்ளது. அது ஓரடி இடைத்தூரமுள்ள இரு முளைக்கட்டைகளுக்கு மேல் கிடையாகக் கிடக்கின்றது. ஒரு முனையிலே தொங்கவிடப்படும் 10 இரு. எடையோ அல்லது மற்றை முனையிலே தொங்கவிடப்படும் 4 இரு. எடையோ அதனைக் கணக்காகச் சரிவுறச் செய்யும். அக்கோலினது எடையையும், அக்கோலின் மையத்திலிருந்து அம்முளைக் கட்டைகளுடைய தூரங்களையுங் காண்க.

(7) ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாயுள்ள P, Q, R என்னும் மூன்று இணை விசைகள் முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையத்தின் வழிச் செல்லுமென காட்டுக.

(8) O என்பது ABC என்ற முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையம். முக்கோணத்தின் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகள் வழியாகவும்,

OA, OB, OC என்பனவற்றின் மையப்புள்ளிகளின் வழியாகவும் செயற்படும் 6 சம இணைவிசைகளின் விளைவு ஒன்பது புள்ளி வட்டமையத்தின் வழிச் செல்லுமெனக் காண்பி.

(9) 3 அடி நீளமும், 2 அடி உயரமுமுள்ள ஒரு பயணப்பெட்டியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அதனுருவ மையத்திலுள்ளது. அப்பெட்டி அதன் கீழ் முகத்தினுடைய முற்பக்க, பிற்பக்க வோரங்களால் பிடிக்கப்பட்டு இரு மனிதர்களால் மேல்மாடிக்குக் கொண்டு செல்லப்படுகிறது. அப்படி எடுத்துச் செல்லும்போது பெட்டி கிடைத்தளத்திற்கு 30° சாய்ந்திருக்கிறது. அப்பெட்டியின் எடை 1 அந்தர் எனின், ஒவ்வொருவரும் அந்த எடையில் எவ்வளவு தாங்குகின்றாரெனக் காண்க.

5. திருப்புத்திறன்

(Moments)

1 ஏதேனுமொரு இருசைச் சுற்றிச் சுழலக் கூடிய ஒரு பொருளின் மீது எந்த இடத்திலாயினும் ஒரு சக்தி செயற்பட்டால், பொதுவாக அது சுழலும்.

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு கதவை எடுத்துக் கொள்ளுவோம். இது தனது கீலைச் சுற்றித் திரும்பும். கதவை அதன் தளத்திற்குச் செங்குத்தான திசையிலே தள்ளுவதாகக் கொள்ளுவோம். தள்ளுமிடம், கீலினிடமிருந்து எவ்வளக்கெவ்வளவு தூரமாய் இருக்கிறதோ அவ்வளவுக்கவ்வளவு தள்ளுவதும் எளிதாகும். மேலும், தள்ளும் விசை அதிகரித்தாலும், கதவு திரும்பும் வேகமும் எளிதாகும்.

எனவே, ஒரு விசையின் திருப்புத்திறன் அதன் அளவுக்கும், அதன் செயற்படு கோட்டிற்கும், சுழற்சி இருசுக்கும், இடைப்பட்ட தூரத்திற்கும் ஏற்ப நேராக இருக்குமென அறிகிறோம்.

ஆகவே, ஒரு விசையின் அளவையும், அதன் செயற்படு கோட்டிற்கும், சுழற்சி இருக்கும் இடைப்பட்ட தூரத்தையும் பெருக்கி வந்த தொகையை, அவ்விருசைச் சுற்றி அவ்விசைக்குரிய திருப்புத்திறனின் அளவு எனக் கொள்ளலாம்.

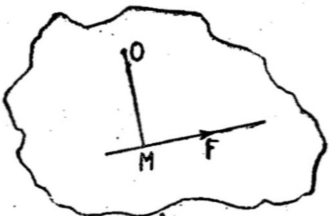
இதேபோல், ஒரு தகடொன்றில், புள்ளி O என்பது நிலையானதெனக் கொள்க. அத்தகட்டின் மீது தாக்குகின்ற விசை F என்பதின் விளைவு, புள்ளி O என்பதை மையமாகக்கொண்டு அதனைத் திரும்பச் செய்வதே. இந்தத் திருப்புத்திறன் அந்த விசையின் அளவுக்கும், அதன் செயல்படு கோட்டிற்கும் புள்ளிக்கும்,இடைப்பட்ட செங்குத்துத் தூரத்திற்கும் ஏற்ப இருக்கும்.

ஆகவே, அவ்விசையின் அளவையும், அதன் செயல்படு கோட்டிற்கும், புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட செங்குத்துத் தூரத்தையும் பெருக்கிவந்த

தொகையை, அப்புள்ளிபற்றிஅவ்விசைக்குரிய திருப்புத் திறனின் அளவு எனக் கொள்ளலாம்.

வரையறை

கொடுத்த ஒரு புள்ளிபற்றி ஒரு விசையினது திருப்புத்திறன் அவ்விசையைக் கொடுத்த புள்ளியிலிருந்து அவ்விசையினது தாக்கக் கோட்டின்மீது வரையுஞ் செங்குத்தால் பெருக்க வரும் பெருக்கமாகும்.



படம்-37

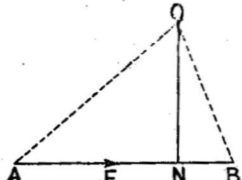
இவ்வாறு, கொடுத்த ஒரு புள்ளி 'O'பற்றி விசை F இனுடைய திருப்புத் திறன் F×ON ஆகும். இங்கு ON என்பது O விலிருந்து F இனுடைய தாக்கக் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்து.

விசை பூச்சியமானலன்றி அல்லது விசையானது, திருப்புத்திறன் எடுக்கப்பட்ட புள்ளிவழிச் சென்ருலன்றி, அப்புள்ளி பற்றி எடுக்கப்பட்ட அவ்விசையினது திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகாதென்பது தெளிவு

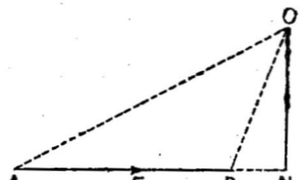
உதாரணமாக, ஒரு கதவை அது சுழலும் கீலை நோக்கித் தள்ளினல் அது அசையாது. இங்கு விசையின் செயற்படு கோடு இருசின் வழியாகச் செல்வதால், திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகிறது

2. திருப்புத் திறனை வடிவியல் முறையால் குறித்தல்:-

F என்னும் ஒரு விசையை அளவிலும், திசையிலும், தாக்கக் கோட்டிலும் AB என்ற் கோடு குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.



படம்-38(i)



படம்-38(ii)

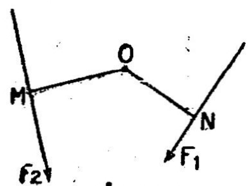
O என்ற யாதேனுமொரு புள்ளியைச் சுற்றி F என்னும் விசையின் திருப்புத் திறனைக் காண்போம்.

O விலிருந்து AB யின் மீது ON என்னும் செங்குத்து வரைக. AO, OB என்பனவற்றை ஒன்றுசேர். வரையறையின்படி, O என்ற புள்ளிபற்றி F இன் திருப்புத்திறன்

$$= F \times ON$$
$$= AB \times ON$$
$$= 2 \times \tfrac{1}{2} AB \times ON$$
$$= 2 \triangle OAB$$

ஆகவே, ஒரு புள்ளி பற்றி ஒரு விசையின் திருப்புத் திறன் அவ் விசையைக் குறிக்கும் கோட்டைப் பீடமாகவும் (base) அப்புள்ளியை மேல் முனையாகவும் (vertex) கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பின் இரு மடங்காகும்.

3. மிகைக்குறித் திருப்புத்திறனும், குறைக்குறித் திருப்புத் திறனும்

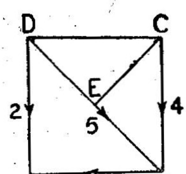


படம்-39

படத்தில், 'O' பற்றி F_1 என்னும் விசையின் திருப்புத்திறன் $F_1 \times ON$ ஆகும். இது வலஞ்சுழியாகச் (clockwise) செயல்புரிகிறது. F_2 என்றும் விசையின் திருப்புத் திறன், $F_2 \times OM$ ஆகும். இது இடஞ் சுழியாகச் (anticlockwise) செயல்படுகிறது. இடஞ் சுழித் திருப்புத் திறனை மிகைக்குறியாலும், வலஞ் சுழித் திருப்புத் திறனை குறைக்குறியாலும் குறிப்பது மரபு.

ஒரு பொருளின்மீது பல விசைகள் ஏககாலத்தில் செயற்பட்டால் ஏதேனுமொரு இருசைச் சுற்றி ஏற்படும் அவ்விசைகளின் கூட்டுத் திருப்புத்திறன், அப் பல்வேறு விசைகளின் தனித்தனித் திருப்புத் திறனின் கூட்டுத் தொகையாகும். இத்தொகையைக் காணும்போது ஒவ்வொரு திருப்புத் திறனையும்அதற்குரிய குறியுடன்கொள்ள வேண்டும்.

4. விளக்க வுதாரணம்



படம்-40

ABCD என்னும் சதுரத்தின் பக்கம் 4 அடி. CB, BA, DA, DB என்னும் கோடுகளின் வழியே முறையே 4, 3, 2, 5 இரு. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகளானவை தாக்குகின்றன. அவ்விசைகளின் C பற்றிய திருப்புத் திறன்களின் இயற் கணிதக் கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

CB வழியே செயல்படும் 4 இரு. எடை விசை C வழியே செல்வதால், C பற்றி அதன் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகும்.

BA வழியே செயல்படும் 3இரு. எடை விசையின் C பற்றிய திருப்புத் திறன் $3\times 4=12$ அடி இரு. இவ்விசையின் திருப்புத் திறன் C பற்றிய வலஞ்சுழியாக இருப்பதால், இதைக் குறைக்குறியுடன் குறிக்க வேண்டும்.

இப்பொழுது, DA வழியே செயல்படும் 2இரு. எடை விசையின் C பற்றிய திருப்புத் திறன் இடஞ்சுழியாக இருப்பதன் காரணமாக அது $2\times 4=8$ அடி இரு. ஆகும்.

C யிலிருந்து DB க்குச் செங்குத்தாக CE வரை. அப்பொழுது C பற்றி DB வழியே செயல்படும் 5 இரு. எடையின் திருப்புத் திறன் $=+5\times CE$ அடி இரு. ஆகும்; ஏனெனின், இத்திருப்புத் திறன் இடஞ் சுழியாக இருப்பதன் காரணமாக

$$CE=4\sin 45^\circ=\frac{4\times 1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

ஆகவே, எல்லாத் திருப்புத் திறன்களின் இயற் கணிதக் கூட்டுத் தொகை $=(4\times o-3\times 4+2\times 4+5\times 2\sqrt{2})$ அடி. இரு.

$$= -12+8+10\sqrt{2}$$

$$= (10\sqrt{2}-4) \text{ அடி. இரு.}$$

$$= 10.14 \text{ அடி. இரு.}$$

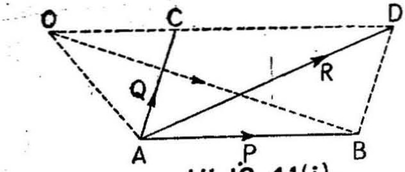
5. தேற்றம்

(Varignon's Theorem)

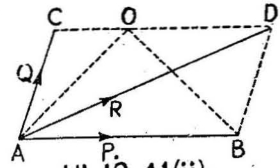
எவையேனும் இருவிசைகளுக்கு விளைவிருந்தால், அவ்விசைகளுடைய தளத்தில் யாதேனுமொரு புள்ளிபற்றி அவ்விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் இயற்கணிதக் கூட்டுத்தொகை அப்புள்ளிபற்றி அவற்றின் விளைவினது திருப்புத்திறனுக்குச் சமன்.

வகை I

அவ் விசைகள் ஒரு புள்ளியிற் கூடுவனவாகக் கொள்வோம்,



படம்-41(i)



படம்-41(ii)

P, Q என்னுமிரண்டு ஒரு தளவிசைகள் A என்னும் புள்ளியில் தாக்கட்டும்.

O என்பது திருப்புத்திறன்கள் எடுக்கப்படும் யாதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக.

OC என்பதை, P யினது திசைக்கு இணையாய், Q வின் தாக்கக் கோட்டை Cயில் சந்திக்கும்படி வரைக.

AC என்பது Q என்னும் விசையை அளவில் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்வோம். இதே அளவு திட்டத்தில் AB என்னும் கோட்டை, P யைக் குறிக்கும்படியாக எடுத்துக்கொள்ளவும்.

ABCD என்னும் இணைகரத்தைப் பூர்த்திசெய்.

OA, OB, OD என்பனவற்றை ஒன்று சேர்.

ஆயின், AD என்பது P, Q என்பனவற்றின் விளைவு R என்பதைக் குறிக்கும்.

(i) முதல் படத்தில் காட்டியபடி, O என்னும் புள்ளி DAC என்னும் கோணத்திற்கு வெளியில் இருக்கட்டும்.

AB யும், ODயும் இணையானவை.

ஆகையால், $\triangle$ OAB$=\triangle$DAB

$=\triangle$ACD [மூலைவிட்டம் இணைகரத்தை இரண்டாகப் பிரிப்பதால்]

இப்பொழுது O பற்றிய Pயின் திருப்புத்திறன்$=2\triangle$OAB

,, ,, Qவின் ,, $=2\triangle$OAC

P. Q என்னும் விசைகளின் 'O' பற்றிய திருப்புத் திறன் ஒரே திசையில் இருப்பதால், அவைகளின் திருப்புத் திறன்களின் இயற்ணிதக் கூட்டுத்தொகை

$=2\triangle OAB+2\triangle OAC$

$=2\triangle DAB+2\triangle OAC$

$=2\triangle ACD+2\triangle OAC$

$=2\triangle OAD$

O பற்றிய விசை R இன் திருப்புத்திறன்.

(ii) O என்னும் புள்ளி, இரண்டாவது படத்தில் காட்டியபடி. DAC என்னும் கோணத்திற்கு உட்பட்டிருக்கட்டும்.

O பற்றிய P என்னும் விசையின் திருப்புத் திறன் இடஞ்சுழியாக இருப்பதால் மிகைக் குறியுடன் கொள்ளவேண்டும்.

$\therefore$ P என்னும் விசையின் திருப்புத் திறன் $=2\triangle OAB$

O பற்றியQ என்னும் விசையின் திருப்புத்திறன் வலஞ்சுழியாக இருப்பதால் குறைக் குறியுடன் கொள்ளவேண்டும்.

$\therefore$ Q என்னும் விசையின் திருப்புத் திறன் $=-2\triangle OAC$.

$\therefore$ O பற்றிய P,Q என்னும் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் இயற் கணிதக் கூட்டுத்தொகை$=2\triangle OAB-2\triangle OAC$.

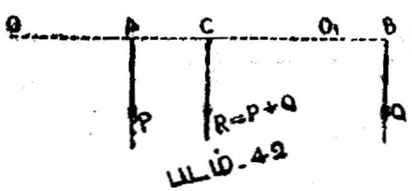
$2\triangle ABD-2\triangle OAC$

$=2\triangle ACD-2\triangle OAC$

$=2\triangle OAD$

$=$O பற்றிய R இன் திருப்புத்திறன்.

வகை II



இரண்டு விசைகளும் இணையாக இருப்பதாகக் கொள் வோம்.

P, Q என்பன இரண்டு ஒத்த இணை விசைகளாகுக; அவற்றின் விளைவு $P+Q=R$ எனக் கொள்வோம்.

இவற்றின் தளத்திலேயுள்ள ஏதேனுமொரு புள்ளி O விலிருந்து OACB என்பதை அவ்விசைகளுக்குச் செங்குத்தாக அவற்றை

முறையே A, C, B என்பனவற்றிற் சந்திக்குமாறு வரைக. அதிகாரம் 4, பிரிவு 2 இன்படி, நாம் பெறுவது $P.AC=Q.AB$ (1)

இப்பொழுது, O பற்றிய P, Q என்பனவற்றினுடைய திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகை

$$P.OA+Q.OB$$
$$=P(OC-AC)+Q(OC+CB)$$
$$=(P+Q)OC-P.AC+Q.CB$$
$$=(P+Q).OC \qquad \text{[சமன்பாடு (1) ஆல்]}$$
$$=R.OC$$

=O பற்றிய விளைவினது திருப்புத்திறன்.

திருப்புத்திறன்கள் எடுக்கப்படும் புள்ளி அவ்விசைகளுக்கிடையே O_1 என்பதைப்போல் இருந்தால், P, Q என்பனவற்றினுடைய திருப்புத்திறன்கள் எதிர்க் குறிகளைக் கொள்ளும்.

இவ்வகையில், நாம் பெறுவதாவது :

O_1 பற்றிய, P, Q என்பனவற்றினுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியுடன் எடுத்த கூட்டுத்தொகை.

$$=P.O_1A-Q.O_1B$$
$$=P(O_1C+CA)-Q(CB-CO_1)$$
$$=(P+Q)O_1C+P.CA-Q.CB$$
$$=(P+Q)O_1C \qquad \text{[சமன்பாடு (1) ஆல்]}$$
$$=R.O_1C$$

$=O_1$ பற்றி விளைவின் திருப்புத்திறன்.

இதேபோல, விசைகள் எதிர் இணையாக இருப்பினும், தேற்றத்தை நிரூபிக்கலாம்.

கி. தே.

திருப்புத்திறன்கள் எடுக்கப்படும் புள்ளி O என்பது விளைவிற் கிடந்தால், அப்புள்ளிபற்றி விளைவினது திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். ஆகவே, அப்புள்ளிபற்றிக் கூறுவிசைகளுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

(அதாவது) இரண்டு விசைகளின் விளைவினது தாக்கக் கோட்டிலுள்ள யாதேனுமொருபுள்ளி பற்றி எடுக்கும் அவ்விரு விசை

களுடைய திருப்புத்திறன்கள் சமனும் எதிர்க் குறியுள்ளனவாயும் மிருக்கும்.

6. திருப்புத் திறன்களின் பொதுமைப்பாடாக்கிய தேற்றம் (Generalised theorem on moments)

ஒரு தளத்து விசைகள் எவ்வளவேனும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்க, அவற்றிற்கு ஒரு விளைவு உண்டெனில், அவற்றினுடைய தளத்தில் யாதேனுமொரு புள்ளிபற்றி எடுக்கும் அவற்றினுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியுடன் எடுத்த கூட்டுத் தொகை, அதேபுள்ளிபற்றி அவற்றின் விளைவினது திருப்புத் திறனுக்குச் சமன்.

அவ்விசைகள் P, Q, R, S,......என்பனவாகுக :

O என்பது அவற்றினுடைய திருப்புத்திறன்கள் எடுக்கப்படும் புள்ளி யாகுக.

P_1 என்பது P, Q என்பனவற்றின் விளைவாயும்,

P_2 ,, P_1, R ,, ,,

P_3 ,, P_2, S ,, ,, இருக்கட்டும்.

இவ்வாறே ஈற்று விளைவு கிடைக்கும்வரை தொடரலாம்.

இப்பொழுது, O பற்றி P என்பதன் திருப்புத்திறன் = O பற்றி P, Q என்பனவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத்தொகையாகும். அன்றியும் O பற்றி P_2 என்பதன் திருப்புத்திறன் = O பற்றி P_1, R என்பனவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகை

= O பற்றி P, Q, R என்பனவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகையாகும்.

அவ்வாறே, O பற்றி P_3 னது திருப்புத்திறன்.

= O பற்றி P_2, S என்பனவற்றின் திருப்புத்திறன்களின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமம்,

= O பற்றி P, Q, R, S ,, ,, ,,

இவ்வாறே, எல்லா விசைகளும் எடுக்கப்படும் வரையுஞ் செல்லலாம்.

ஆகவே, O என்ற புள்ளிபற்றிய ஈற்று விளைவினது திருப்புத்திறன்

= O பற்றிய கூற்று விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் குறியுடன் எடுத்த கூட்டுத் தொகையாகும்.

கி.தே:

திருப்புத்திறன்கள் எடுக்கப்படும் புள்ளி, விளைவின் கோட்டில் அமைந்தால், அப்புள்ளிபற்றி விளைவின் திருப்புத்திறன் பூச்சியமாகும். ஆகவே, அப்புள்ளிபற்றிக் கூற்று விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகையும் பூச்சியமாகும்.

மறுதலையாக, யாதேனும் ஒரு தொகை விசைகளுடைய தளத்தில் ஒரு புள்ளிபற்றி எடுத்த அவ்விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்கள் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமானால், அவற்றின் விளைவு பூச்சியமாகும் அல்லது திருப்புத்திறன்கள் எடுக்கப்பட்ட புள்ளிவழியே அது செல்லும்.

7. பல்வேறு ஏகதள இணைச்சக்திகள் செயற்படும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் சமநிலைக்குரிய நிபந்தனைகள்

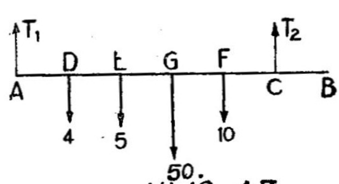
(1) அப்பல்வேறு இணைச்சக்திகளின் விளைவு பூச்சியமாதல் வேண்டும் (அ-து) அவைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

(2) அத்தளத்திலுள்ள எந்தப் புள்ளி பற்றியும் இப்பல்வேறு விசைகளின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாதல்வேண்டும்.

8. உதாரணம் 1.

12 அடி, நீளமும், 50 இறா. எடையுமுள்ள AB என்ற சீரான கோலொன்று A என்ற முனையில் இணைக்கப்பட்ட நிலைக்குத்திழையாலும், B என்ற முனையிலிருந்து 2 அடி, தூரத்தில் இணைக்கப்பட்ட மற்றொரு நிலைகுத்திழையாலும் தாங்கப்படுகின்றது. அதில், 4 இறா, 5 இறா, 10 இறா. எடைகள் A என்ற முனையிலிருந்து முறையே 2 அடி. 4 அடி, 8 அடி தூரங்களில் தொங்கவிடப்படுகின்றன. அவ்விழைகளுடைய இழுவிசைகள் என்ன?

மற்றை இழை இணைக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி C ஆகுக. G என்பது கோலின் மையமாகவும், D, E, F என்பன கொடுக்கப்பட்ட எடைகள் தாங்கப்படும் புள்ளிகளாகவும் கொள்வோம்.



படம் - 43

T_1, T_2 என்பன அவ்விழைகளுடைய இழுவிசைகளாகுக.

கோல் சமநிலையில் இருப்பதால், அதன்மேல் செயற்படும் விசைகளுடைய விளைவு, பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

∴ A பற்றிய அவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் குறியுடன் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

ஆகவே, $10\ T_2 = 4\times 2 + 5\times 4 + 50\times 6 + 10\times 8$

$= 408$

$\therefore T_2 = 40.8$ இரு. எடை.

C பற்றிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் எடுத்தால், நாம் பெறுவது

$10\ T_1 = 10\times 2 + 50\times 4 + 5\times 6 + 4\times 8$

$= 282$

$\therefore T_1 = 28{\cdot}2$ இரு. எடை.

இழுவிசை T_1 என்பது வேறு வழியாலும் பெறக்கூடும்

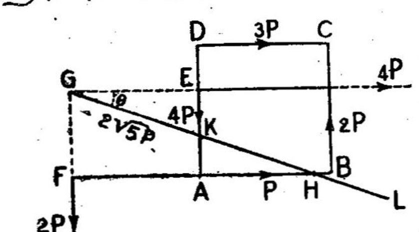
∴ இணைவிசைகள் $T_1 + T_2 = 69$

ஆனால், $T_2 = 40{\cdot}8$ இரு. எடை.

$\therefore T_1 = \underline{28{\cdot}2}$ இரு. எடை.

உதாரணம் 2.

ABCD என்பது ஒரு சதுரம். AB, BC, DC, DA என்பனவற்றின் நீளவாட்டத்தில் முறையே P, 2P, 3P, 4P என்ற விசைகள் தாக்குகின்றன. விளைவினுடைய அளவு, திசை, தாக்கக்கோடு என்பனவற்றைக் காண்க.



படம்-44

அச்சதுரத்தின் பக்கம் 'a' ஆகுக; AB, DC வழியே செயல்படும் P, 3P என்ற ஒத்த இணை விசைகளின் விளைவு அவற்றின் திசையில், $(P+3P) = 4$ Pக்குச் சமனாய், AD யில் உள்ள E என்னும் புள்ளியில், P.AE = 3P. DE என்றாகும்படி செயல்படும்.

AE $= x$ எனின்,

$P.\ x = 3P\ (a - x)$

$\therefore x = \frac{3}{4}a$

BC DA வழியே செயல்படும், 2P, 4P என்ற எதிர் இணை விசைகளின் விளைவு அவற்றுள் பெரிய விசையாகிய 4P யின் திசையில், (4P—2P) = 2P க்குச் சமனுய், AB ஐ வெளிப்புறமாகப் பிரிக்கும் F என்னும் புள்ளியில் 4P. AF = 2P. BF என்ருகும்படி செயல்படும்.

$$AF = y \text{ எனின்,}$$

$$4P.\, y = 2P\,(a + y)$$

$$\therefore y = a$$

இந்த இரண்டு கூறுகளுடைய தாக்கக்கோடு G யில் சந்திக்கட்டும்.

இப்பொழுது, நாம் பெறுவது G என்னும் புள்ளியில் GE வழியே தாக்கும் 4P என்ற விசையும், GF வழியே செயல்படும் 2P என்ற விசையுமாகும்.

இவற்றின் விளைவு $= \sqrt{(4P)^2 + (2P)^2} = 2\sqrt{5}P$ க்குச் சமம். விளைவின் தாக்கக்கோடு GE உடன் θ என்னும் கோணம் உண்டாக்கிஞல்,

$$\tan\theta = \frac{2P}{4P} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 26^\circ\ 34'$$

ஆகவே, கொடுத்த விசைகளின் விளைவு $2\sqrt{5}P$ க்குச் சமனுய், G என்ற புள்ளியில் GL வழியே, GE என்ற திசைக்கு (அ-து) AB யின் திசைக்கு $26^\circ\ 34'$ அளவில் சாய்ந்து செயல்படும்.

வேறுவழி :

பெரும்பாலும் நீண்ட வடிவமைப்பு யாதுஞ் செய்யாது விளைவினது தாக்கக் கோட்டை இவ்வதிகாரம், பிரிவு 6இன் கிளைத் தேற்றந் துணை கொண்டு எளிதிற் பெறலாம்.

தாக்கக்கோடு AB யை H என்ற புள்ளியிலும் AD யை K என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கட்டும், H என்பது விளைவினது தாக்கக் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாதலால் H பற்றி நான்கு விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாதல் வேண்டும்,

AH$=x$ எனின்,

$2P(a-x)-3P.\ a+4P.\ x=O$

(அ-து) $2a-2x-3a+4x=O$

$\therefore\ 2x=a$

$x=\frac{a}{2}$

இவ்வாறே, K பற்றிய நான்கு விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

AK$=y$ எனின்,

$P.\ y+2P.\ a-3P\ (a-y)=O$

$y+2a-3a+3y=O$

$4y=\ a$

$\therefore y=\ \frac{a}{4}$

அன்றியும், AB யிற்குச் செங்குத்தான விசைகளின் கூறுகள் $=4P-2P=2P$ ஆகும்.

AB யிற்கு இணையாகவுள்ள கூறுகள் $=3P+P=4P$ ஆகும். எனின், விளைவின் அளவு$=\sqrt{(4P)^2\ +\ (2P)^2}=2\sqrt{5}P$(i)

AB யுடன் விளைவின்திசையின் கோணம் θ எனின்,

$$\tan\theta=\frac{2P}{4P}=\ \frac{1}{2}\ \text{(ii)}$$

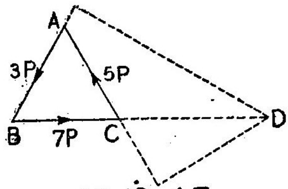
விளைவின் தாக்கக்கோடு AB யை H என்ற புள்ளியிலும், AD யை K என்ற புள்ளியிலும் சந்திக்கின்றது இங்கு AH$=\frac{a}{2}$;

AK$=\ \frac{a}{4}$

உதாரணம் 3

3P, 7P, 5P என்பனவற்றிற்குச் சமமான விசைகள் ABC என்னுஞ் சமபக்க முக்கோண மொன்றினுடைய பக்கங்கள் AB, BC, CA என்பன வற்றின் நீளவாட்டத்தில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவினுடைய அளவு, திசை, தாக்கக்கோடு என்பனவற்றைக் காண்க.

அந்த முக்கோணத்தின் பக்கம் 'a' ஆகுக. விளைவின் தாக்கக் கோடு BC யை, D யில் சந்திக்கட்டும்; எனின், D பற்றிய விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்கள் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.



படம்-45

$CD = x$ எனின்,

$$3P\,(a + x) \sin 60^\circ = 5P.\, x \sin 60^\circ$$

$$\therefore x = \frac{3a}{2}$$

அன்றியும், BC என்னும் திசையில் கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை,

$$7P - 5P \cos 60^\circ - 3P \cos 60^\circ = 3P$$

BC க்குச் செங்குத்துத் திசையில் கூறுகளின்

கூட்டுத்தொகை $= 5P \sin 60^\circ - 3P \sin 60^\circ = 2P \sin 60^\circ$

$$= 2P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = P\sqrt{3}$$

எனின், விளைவு $= \sqrt{(3P)^2 + (P\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}\,P$ யாகும்.

விளைவின் திசை BC யுடன் θ என்ற கோணம் உண்டாக்கினால்,

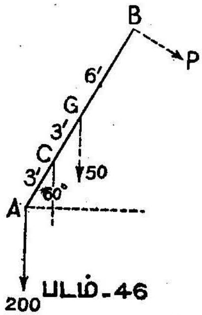
$$\tan \theta = \frac{P\sqrt{3}}{3P} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

ஆகவே, விளைவு $2\sqrt{3}P$ க்குச் சமனாய், BC யுடன் 30° சாய்ந்து, BC யின் நீட்சியில் $CD = \frac{3a}{2}$ என்றமைந்த D என்னும் புள்ளிவழிச் செயல்படுகிறது.

உதாரணம் 4

12 அடி நீளமும், 20 இரு. எடையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோலொன்று A என்னும் முனையிலிருந்து 3 அடி தூரத்திலுள்ள சுழல் முனை (Pivot) ஒன்றன்மீது திருகுகின்றது. 200 இரு. எடையொன்று A யில் தொங்கவிடப்படுகிறது. A யை B க்குக் கீழாகவும், AB யைப் படுகைக் கோட்டிற்கு 60° சாய்ந்தும், கோலைச் சமநிலையில் வைக்க, B என்னும் புள்ளியில் கோலுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் விசையின் அளவு என்னவென்று காண்க.



படம்-46

C என்பது சுழல்முனையையும், G என்பது கோலின் மையப் புள்ளியையும் குறிக்கட்டும்.

C பற்றிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் குறியில் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும் பொழுது, அக்கோல் சமநிலையில் இருக்கும்.

C பற்றிய 200 இரு. எடையின் திருப்புத்திறன் $= 200 \times 3 \cos 60°$ இதேபோல, C பற்றிய 50 இரு. எடையின் திருப்புத்திறன் $= 50 \times 3 \cos 60°$

C பற்றிய P யின் திருப்புத்திறன் $= P \times 9$

$$\therefore 200 \times 3 \cos 60° - 50 \times 3 \cos 60° - 9P = 0$$

$$300 - 75 - 9P = 0$$

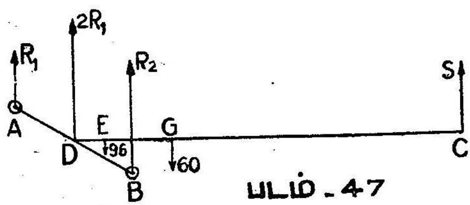
$$\therefore 9P = 225$$

$$\therefore P = 25$$ இரு. எடை.

உதாரணம் 5

3 அடி இடைத்தூரமுள்ள இருபெருஞ் சக்கரங்களுக்குப் பின்னுக, 8 அடி தூரத்தில் சமச் சீராக வைக்கப்பட்ட ஒரு சிறு சக்கரம் கொண்ட ஒரு முச்சக்கர வண்டியின் எடை, 60 இரு. ஆகும். அதன் எடை, முன் சக்கரங்களுக்குப் பின்னுக 9 அங்குல இடைதூரத்திலும், 96 இரு. நிறையுள்ள சவாரி செய்பவரின் எடை, முன்சக்கரங்களுக்குப் பின்னுக 3 அங்குல தூரத்திலும், செயல்பட்டால், தரையின்மீது ஒவ்வொரு சக்கரத்தின் அழுத்தத்தையும் காண்க.

A, B என்பன முன் சக்கரங்களேயும், C என்பது பின்சக்கரத்தையும் குறிக்கட்டும்.



படம்-47

வண்டியின் எடை, G என்றபுள்ளியிலும், சவாரி செய்பவரின் எடை E என்ற புள்ளியிலும் செயல்படுவதாகக் கொள்வோம்.

தரையின்மீது சக்கரங்களின் அழுத்தத்தின் காரணமாக, தரையின் எதிர்த் தாக்கங்கள் R_1 R_2, S என்றால், சமச் சீரின்படி. $R_1 = R_2$ என்றாகும்.

இவ்விரு சமவிசைகளும் AB யின் மையப் புள்ளியாகிய D யில் செயல்படுவதாகக் கொள்ளலாம்.

$$DE = 3''; \ DG = 9''$$

இணைவிசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால்,

$$2R_1 + S = 96 + 60 = 156 \qquad (1)$$

எப்புள்ளி பற்றியும், குறிப்பாக D பற்றிய எல்லா விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

$$\therefore \ S \times 36 = 96 \times 3 + 60 \times 9$$
$$= 288 + 540 = 828$$
$$\therefore \ S = \frac{828}{36} = 23$$

இந்த மதிப்பை (1)இல் பிரதியீடு செய்தால், நாம் பெறுவது

$$2R_1 + 23 = 156$$
$$2R_1 = 133$$
$$\therefore R_1 = 66\tfrac{1}{2}$$

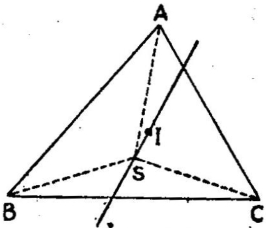
ஆகவே, தரையின்மீது முன்சக்கரத்தின் அழுத்தங்கள் ஒவ்வொன்றும் $66\frac{1}{2}$ இரு. எடையும், பின் சக்கரத்தின் அழுத்தம் 23 இரு. எடையுமாகும்.

உதாரணம் 6

ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் முறையே P, Q, R என்ற விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவைகளின் விளைவு முக்கோணத்தின் உள்வட்ட, சுற்றுவட்ட மையங்கள் வழியே சென்றால்,

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$$

எனக் காட்டுக.



படம் - 48

முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையத்தை S என்றும், உள்வட்ட மையத்தை I என்றும் குறிப்போம். விசைகளின் விளைவு S வழியும், I வழியும் செல்வதால், இப்புள்ளிகள் பற்றிய இவ்விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை தனித்தனியே பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

உள்வட்ட ஆரை r எனில், I என்ற புள்ளிபற்றிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் எடுக்க. நாம் பெறுவது

$$P.r + Q.r + R.r = O \qquad (1)$$

அன்றியும், முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட ஆரை R_1 எனில், S லிருந்து BC, CA, AB என்ற பக்கங்களுக்கு வரையும் செங்குத்துகளின் தூரங்கள் முறையே $R_1 \cos A$, $R_1 \cos B$, $R_1 \cos C$ என்பனவாகும்.

ஆகவே, S என்ற புள்ளி பற்றிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்கள் காண நாம் பெறுவது

$$P.R_1 \cos A + Q R_1 \cos B + R.R_1 \cos C = O$$

(அ-து) $P \cos A + Q \cos B + R \cos C = O \qquad (2)$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து, குறுக்குப் பெருக்கல் விதியின்படி, நாம் பெறுவது

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$$

பயிற்சி 5

1. ABCD என்பது ஒரு சதுரம். AB, CB, DC, DA என்ற பக்கங்களின் நீளவாட்டில் முறையே 6, 5, 8, 12 இரா. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் தாக்குகின்றன; அச் சதுரத்தின் பக்கம் 4 அடி ஆயின், அதன் மையம் O பற்றிய அவற்றினுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியுடன் கூடிய கூட்டுத் தொகையைக் காண்க.

2. ABCDEF என்னும் ஒழுங்கான அறுகோணம் ஒன்றின் பக்கம் 2 அடி. AB, CB, DC, DE, EF, FA என்ற பக்கங்களின் நீள வாட்டில் முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 இரு. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. அவ்விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியுடன் கூடிய கூட்டுத் தொகையை A பற்றிக் காண்க.

3. 20 அடி நீளமான ஒரு கோலின் ஒரு முனை ஒரு கிடைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டு, அக்கோல் 30 இரு. எடைக்குச் சமமான இழு விசையையுடைய ஓரிழையினால் இழுக்கப்படுகின்றது. அவ்விழை அக்கோலின் மேல்நுனியில் இணைக்கப்பட்டு அடிவானத்திற்கு 30°யில் சாய்ந்திருக்கின்றது. கோலின் அடிப்பாகத்திலிருந்து 4 அடி உயரத்தில் எக்கிடை விசையைப் பிரயோகித்தால் அக்கோல் நிலைக்குத்து நிலையிலிருக்குமெனக் காண்க.

4. ஒரு தந்திக் கம்பத்தைச் சுற்றிச் செல்கின்ற கம்பி கிடையாக இருக்கின்றது. அக்கம்பத்தில் இணைக்கப்பட்டுள்ள இரு பகுதிகளும் ஒன்றுக்கொன்று 60° என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கின்றன. அக்கம்பம், அதன் மையத்தில் இணைக்கப்பட்டும், அடிவானத்திற்கு 60° யில் சாய்ந்துள்ளதுமான ஒரு கம்பியினாலே தாங்கப்படுகிறது. இக்கம்பியின் இழுவிசை தந்திக் கம்பியின் இழுவிசையின் $4\sqrt{3}$ மடங்கெனக் காட்டுக.

5. கொடுக்கப்பட்ட நீளத்தினையுடைய ஒரு கயிற்றின் நுனியை ஒரு தூணின் அடியிலிருந்து என்ன உயரத்தில் நிலைப்படுத்தினால், தரையிலே நின்று அக்கயிற்றின் மற்றை முனையிலே தந்தவொரு விசையோடு இழுக்கும் ஒரு மனிதனுக்கு, அத்தூணைக் கவிழ்க்கும் இயல்பு மிகப் பெரிதாகும்?

6. ஒருவிசையின் அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அன்றியும், தந்த இரு புள்ளிகள் A, B என்பன பற்றிய அதனுடைய திருப்புத்திறன்களும் அறியப்பட்டுள்ளன. ஒரு வடிவ கணிதவமைப்பால், அதன் தாக்கக் கோட்டைக் காண்க.

7. தந்த அளவையும், நிலையையுமுடைய இரு விசைகளுக்கு ஒரு தளத்திலே உள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி ஒரு போக்கான சமதிருப்புத்திறன்கள் உண்டெனில், அப்புள்ளியின் நியமப் பாதையைக் காண்க.

8. AB என்பது ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் BP, BQ என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களிலுள்ள நாண்கள். BP, BQ என்பன வற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்கள் A பற்றிச் சமமெனக் காட்டுக.

9. 16 அங்குல நீளமான ஒரு கோல் 9 அங்குல இடைத் தூரமுள்ள இரு முளைக்கட்டைகளின்மீது அதன் மையம் அதற்கிடையே நடுவில் இருக்கும்படி கிடக்கின்றது. அதனுடைய சமநிலையைக் குலைக்காது, அதன் இருமுனைகளிலிருந்து ஒன்றன்பின் ஒன்ருகத் தொங்கவிடக் கூடிய மிகப் பெரிய எடைகளானவை முறையே 4இரு. 5இரு. என்பன. அக்கோலினது எடையையும், அதன் எடை செயல்படும் புள்ளியின் நிலையையுங் காண்க.

10. 4 அடி நீளமும், 10 இரு. எடையுமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீரான கோல் ஒரு சுவரில் A யில் பிணைக்கப்பட்டு (Hinged) அதன் மற்றை முனை B யிலிருந்து 1 அடி தூரத்தில் 12 இரு. எடையைத் தாங்கு கிறது. அக்கோலானது, A யின் மேலே நிலைக்குத்தில் சுவரில் உள்ள C என்னும் புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்ட BC என்னும் ஓரிழையினாலே, கிடை நிலையிலே தாங்கப்படுகிறது. அவ்விழை AB என்ற கோலுடன் 30° கோணம் உண்டாக்கினல், அதன் இழுவிசையைக் காண்க.

11. $2\frac{1}{2}$ அடி நீளமும், 8 இரு. எடையுங்கொண்ட ஒரு சீரான கோலொன்று ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள A, B என்னும் புள்ளி களிலே நிலைப்படுத்திய இரு முளையாணிகளின்மீது வைக்கப்பட்டிருக் கின்றது. AB ஆனது 5 அங்குல நீளமாய், கிடையில் இருக்கின்றது. அம்முளையாணிகளின் மீதுள்ள அமுக்கங்களின் வித்தியாசம் 6 இரு. எடையாயின், அம்முளையாணிகளுக்கு அப்பால் அக்கோலினுடைய முனை கள் நீண்டிருக்கின்ற தூரங்களைக் காண்க.

12. W எடையும், 2 l நீளமும் கொண்ட PQ என்னும் ஒரு சீரான கோலொன்று, ஒரேமட்டத்தில் l தூரத்தில் உள்ள R,S என்னும் கிடைநிலையில் உள்ள வழுவழுப்பான இருமுளைக் கட்டைகளின் மேல் கிடக்கின்றது. P யிலும், Q விலும் முறையே pw, qw என்னும் எடைகள் தொங்கவிடப்படும் பொழுது R, S என்பவற்றிலுள்ள எதிர்த் தாக்க விசைகள் சமமாகக் காணப்பட்டால்,

$$PR = \frac{1}{2}\left(\frac{1+3q-p}{1+q+p}\right) \text{ எனக் காட்டு }.$$

13. 4 அடி நீளமான ஒரு சீரான உத்தரமொன்று 3அடி இடைத் தூரமுள்ள இரு தாங்கல்களினுல் ஒரு கிடைநிலையில், அவ்வுத்தரம் அத் தாங்கல்களுள் ஒன்றுக்கப்பால் ஓரடி நீண்டிருக்குமாறு, தாங்கப்படு கின்றது. ஒரு தாங்கல்மீதுள்ள விசை மற்றையதன் மீதுள்ள விசையின் இரு மடங்கெனக் காட்டுக,

14. 2 அடி நீளமுள்ள ஒரு நேரான எடையில்லாத கோல் 3 அங்குல இடைத்தூரத்தில் வைக்கப்பட்ட இரு முளைக் கட்டைகளுக்கிடையிலே கிடைநிலையில் கிடக்கின்றது. ஒரு முளைக்கட்டை, அக்கோலின் ஒரு முனையில் இருக்க, மற்றை முனையிலிருந்து 5 இரு. எடையொன்று தொங்கவிடப்படுகின்றது. அம்முளைக் கட்டைகளின் மீதுள்ள அமுக்கத்தைக் காண்க.

15. ABCD என்ற ஒரு உத்தரம் B, C என்னும் இரு தாங்கல்கள் மீது கிடைநிலையில் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இங்கு, AB=BC=CD ஆகக் காணப்படுகிறது. Aயிலிருந்து p இரு. எடை தொங்கவிடினும் அல்லது Dயிலிருந்து q இரு. எடை தொங்கவிடினும், உத்தரம் கணக்காகச் சரிவுறும் எனத் தெரிகிறது. உத்தரத்தின் எடையைக் கண்டு பிடி. மேலும், புவி ஈர்ப்பு மையம் ADயை $2p+q: p+2q$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றது எனக் காண்பி.

16. பாரமான ஒரு சீர்க்கோலொன்று 4 அடி நீள முள்ளது. அது ஓரடி இடைத்தூரமுள்ள இரு முளைக் கட்டைகளுக்கு மேலே கிடையாகக் கிடக்கின்றது. ஒரு முனையிலே தொங்கவிடப்படும் 10 இரு. எடையோ அல்லது மற்றை முனையிலே தொங்கவிடப்படும் 4 இரு. எடையோ அதனைக் கணக்காகச் சரிவுறச் செய்யும் அக்கோலினது எடையையும், அக்கோலின் மையத்திலிருந்து அம்முளைக் கட்டைகளுடைய தூரங்களையுங் காண்க.

17. மூன்று விசைகள் ஒரு முக்கோணப் பக்கங்களின் நீளவாட்டில் தாக்குகின்றன. அவ்விசைகளுள் இரண்டின் கூட்டுத்தொகை மூன்றும் விசைக்கு அளவில் சமனுயுந் திசையில் எதிராயுமிருந்தால், அம்மூன்று விசைகளின் விளைவு, அம்முக்கோணத்தின் உள் வட்டமையத்தினூடாகச் செல்லு மெனக் காட்டுக.

18. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் முறையே P, Q, R என்ற விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவைகளின் விளைவு, முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையத்திற்கூடாகவும், புவியீர்ப்பு மையத்திற்கூடாகவுஞ் சென்றால்,

$$\frac{P}{\sin 2A \sin (B-C)} = \frac{Q}{\sin 2B \sin (C-A)} = \frac{R}{\sin 2C \sin (A-B)}$$

எனக் காட்டுக.

19. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய BC, CA, AB என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் முறையே P, Q, R என்ற விசைகள் தாக்குகின்றன. அவைகளின் விளைவு, முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையத்தையும், மையக்கோட்டுச் சந்தியையும் இணைக்கும் கோடுவழியே செயல்பட்டால்,

$$\frac{P}{a(b-c)} = \frac{Q}{b(c-a)} = \frac{R}{a(b-c)}$$

எனக் காட்டுக.

20. 5 அடி நீளமான கோலொன்று தன்னுடைய முனைகளில் இணைத்தநிலைக்குத்திழைகள்இரண்டாலேதாங்கப்படுகின்றது. அதன்கண் ஒரு முனையிலிருந்து 1, 2, 3, 4 அடித் தூரங்களிலே முறையே 4, 6, 8, 10 என்னும் இரு. எடைகள் தொங்கவிடப்படுகின்றன. அக் கோலினது எடை 2 இரு. எனில், அவ்விழைகளுடைய இழுவிசைகள் என்ன?

21. 84 இரு. எடையுள்ள ஒரு முச்சக்கர வண்டியில், 3 அடி இடைத்தூரமுள்ள அதன் இரு பெருஞ் சக்கரங்களை இணைக்கும் கோட்டிற்கு முன்னுக, 3 அடி 6 அங்குலத்தில் சமச் சீரில் வைக்கப்பட்ட ஒரு சிறு சக்கரமுண்டு. அவ்வண்டியின் புவி ஈர்ப்புமையம் பிற் சக்கரங் களுக்கு முன்னுக 1 அடிக் கிடைத்தூரத்திலும், 154 இரு. எடையுள்ள அதை ஓட்டுவோனின் புவி ஈர்ப்பு மையம் பிற்சக்கரங்களுக்கு முன்னுக, 6 அங்குலத்திலும் இருந்தால், வெவ்வேறு சக்கரங்களின்மீது எவ்வாறு எடை பங்கிடப்படுகின்ற தெனக் காண்க.

22. P, 2P, 3P, 4P, என்பனவற்குச் சமமான விசைகள், ABCD என்னுஞ் சதுரத்தினுடைய ஓரொழுங்கிலெடுத்த பக்கங்களின் நீளவாட்டில் தாக்குகின்றன; விளைவினுடைய, அளவு, திசை, தாக்கக்கோடு என்பனவற்றைக் காண்க.

23. 3, 4, 5, 6 இரு. எடையுள்ள விசைகளானவை முறையே ஓரொழுங்கில் எடுத்த ABCD என்னும் ஒரு சதுரத்தின் பக்கங்களின் நீளவாட்டில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவினுடைய அளவு, திசை தாக்கக்கோடு என்பனவற்றைக் காண்க.

24. ABCD என்ற சதுரத்தின் பக்கம் 1 அடி. AB, BC, DC, AD என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் முறையே 1, 2, 4, 3 என்பனவற்றிற்கு

விசித சமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. விளைவு அச்சதுரத்தின் ஒரு மூலை விட்டத்திற்குச் சமாந்தரமெனக் காட்டுக; அது, அச்சதுரத்தின் பக்கங்களை எங்கு வெட்டுகின்றதெனவுங் காண்க.

25. ABCD என்பது தன் அடுத்துள பக்கங்கள் AB,BC என்பன முறையே 3 அடி, 4 அடி என்பனவாயுள்ள ஒரு செவ்வகம். AB,BC,CD என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் 30, 40, 50 இரு. எடை விசைகளானவை தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

26. P, 2P, 3P, என்னும் மூன்று விசைகள் ABC என்னுந் தரப்பட்ட சமபக்க முக்கோணமொன்றினுடைய AB, BC, CA என்னும் பக்கங்களின் நீளவாட்டில் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவினுடைய அளவு, திசைகளைக் காண்க. அதனது தாக்கக் கோடு BC யைச் சந்திக்கும் புள்ளியையுங் காண்க.

27. ABC என்பது ஒரு சீர்க் கம்பித் துண்டு. அதனுடைய பக்கங்கள் AB, BC என்பன வளைவின்றி நேராகவும், கோணம் ABC என்பது 135° ஆகவும் உள்ளன. கம்பிக்கு B யில் இணைக்கப்பட்ட ஓரிழையினால் அது நிலையான ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்படும்போது, AB என்னும் பகுதி கிடையாகக் காணப்பட்டால், BC: AB$=4\sqrt{2}$: 1 எனக் காண்பி.

28. 2, $2\frac{1}{2}$, 1, 3 கிலோ கிராம் எடைகளுக்குச் சமமான நான்கு விசைகள் OA, OB, OC, OD என்னும் நேர்கோடுகளின் திசைகளிலே தாக்குகின்றன. $\angle AOB=40^\circ$ ஆகவும், $\angle BOC=100^\circ$ ஆகவும், $\angle COD=125^\circ$ ஆகவுமிருந்தால், அவற்றின் விளைவின் அளவையும், திசையையும் காண்க.

29. ACDB என்பது ஒரு கிடைக்கோட்டிலே ஒன்றுக்கொன்று ஏழு டெசிமீட்டர் தூரத்திலுள்ள A,B என்னும் புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட முனைகளையுடைய ஓரிழையாகும். AC, CD, DB என்பனவற்றினுடைய நீளங்கள் முறையே $3\frac{1}{2}$ டெசிமீட்டர், 3 டெசிமீட்டர், 4 டெசிமீட்டர் என்பனவாகும். Cயில் ஒரு கிலோகிராம் எடையொன்று தொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றது. Dயில் சமநிலைகொண்ட நிலையில் $\angle CDB$ என்பது ஒரு செங்கோணம் உண்டாக்கும்படியான அளவுடைய ஒரு தேரா எடை இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இந்த எடையின் அளவையும், அவ்விழைகளுடைய இழு விசைகளையும் காண்க.

30. A, B என்பன ஒரு கிடைக் கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று 16 டெசி மீட்டர் தூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகள்; AO, OB என்பன

6 டெசி மீட்டர், 1½ டெசி மீட்டர் என்னும் நீளங்களையுடைய இரண்டு இழைகள். அவை 10 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருளை Oவில் தாங்குகின்றன. அப்பொருளுக்கு Oவில் இணைக்கப்பட்ட மூன்றும் இழையொன்று, மற்றை முனையில் $2\frac{1}{2}$ கிலோகிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருளுக்கு இணைக்கப்பட்டு, ABயினது நடுப்புள்ளி Cயிலுள்ள மழ மழப்பான ஒரு சிறு கப்பியின்மீது செல்கின்றது. AO, OB என்னும் இழைகளுடைய இழுவிசைகளைக் காண்க.

31. ABCD என்பது ஒரே கிடைக்கோட்டிலுள்ள A, D என்னும் இரு புள்ளிகளுக்குத் தொடுக்கப்பட்ட ஓரிலேசான இழை. B, C என்பனவற்றில் இரு எடைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. சமநிலையை அடையும் நிலையில், AD என்னுங் கோட்டிற்குக் கீழே B, C என்னும் புள்ளிகளுடைய தூரம் முறையே 4 டெசிமீட்டர், 6 டெசிமீட்டர் என்பன. AB, CD என்பனவற்றினுடைய நீளங்கள் முறையே 6 டெசி மீட்டர், 8 டெசி மீட்டர் என்பனவாயும், AD யினது தூரம் 14 டெசிமீட்டர், ஆகவும், Bயிலுள்ள எடையின் அளவு 2 கிலோகிராம் ஆகவுமிருந்தால், Cயிலுள்ள எடையைக் காண்க.

32. ABCD என்பது தளர்ந்தவாறு, ஒருமித்து இணைக்கப்பட்ட நான்கு எடையில்லா கோல்களாலாகிய ஒருசாய்சதுரம். AB,AD என்பன பனவற்றினுடைய மையங்களுக்கு இணைக்கப்பட்டு, நாலு கோல்களுள் ஒவ்வொன்றின் அரைப்பங்கு நீளமுள்ள எடையில்லாக் கோலொன்றினல் அச்சட்டம் உறுதியாக்கப்படுகின்றது. இச்சட்டம் Aயிலிருந்து தொங்க விடப்படும்போது, Cயில் 100 இரு எடையொன்று இணைக்கப்பட்டால், குறுக்குக் கோலின்மீதுள்ள அமுக்கம் (Thrust) ஏறத்தாழ 115·5 இரு. எடையெனக் காட்டுக.

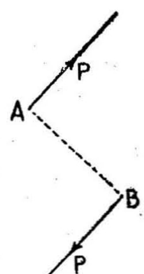
6. சுழலிணைகள்
(Couples)

1. வரையறை

தாக்கக் கோடுகள் ஒன்றே அல்லாத சமமான இரு எதிர் இணை விசைகள் ஒரு சுழலிணையை உண்டாக்கும்.

ஒரு சுழலிணையின் **புயம்** அச்சுழலிணையை ஆக்கும் விசைகளுடைய தாக்கக் கோடுகளுக்கிடையே உள்ள செங்குத்துத்தூரம். (அ-து) அவ் விசைகளுள் ஒன்றினுடைய தாக்கக்கோட்டில் உள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியிலிருந்து மற்றையதன் தாக்கக்கோட்டிற்கு வரையுஞ் செங்குத் தாகும்.

இவ்வண்ணம் (P, P) என்றுஞ் சுழலிணையின் புயம் AB ஆகும்.



படம்-49

2. சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் :

ஒரு சுழலிணையின் திருப்புத்திறன், அச்சுழலிணையை ஆக்கும் விசைகளுள் ஒன்றை, அச்சுழலிணையின் புயத்தாற் பெருக்க வரும் பெருக்கமாகும்.

படத்தில்,அச்சுழலிணையின் திருப்புத்திறன் PA×B

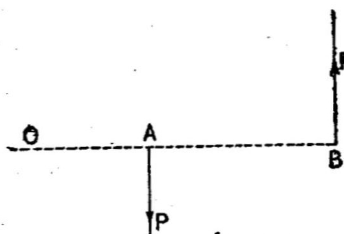
சுழலிணைக்கு உதாரணங்கள்: ஒரு கடிகாரச் சாவியை முறுக்கும்போது பிரயோகிக்கப்படும் விசைகள், ஒரு கதவைத் திறக்கும்போது அதன் கைப்பிடிக்கும் பிரயோகிக்கப்படும் விசைகள் ஆகும்.

3. தேற்றம்

ஒரு சுழலிணையின் விசைகளுடைய தளத்திலே உள்ள யாதேனு மொருபுள்ளி பற்றி அவ்விரு விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்களின்

குறியியல் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியாயும், அச்சுழலிணையினது திருப்புத் திறனாயும் இருக்கும்.

அச்சுழலிணை ஒவ்வொன்றும் Pயிற்குச் சமனான இரு விசைகளாகுக. O என்பது அவற்றினுடைய தளத்திலே உள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி ஆகுக.



படம். 50

OAB என்பதை அவ்விசைகளுடைய தாக்கக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாய் அவற்றை முறையே, A, B என்பனவற்றிற் சந்திக்கும்படி வரைக

O பற்றியுள்ள அவ்விசைகளுடைய திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை.

$$=P.\ OB-P.\ OA=P.\ (OB-OA)=P.\ AB.$$

= அச்சுழலிணையினது திருப்புத்திறன்,

ஆகவே, திருப்புத்திறன்களின் எடுக்கப்படும் புள்ளி O ஆனது எதுவாயிருந்தாலும், அவற்றின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை ஒரேயளவினதெனலாம்.

4. தேற்றம்

தம் திருப்புத்திறன்கள் சமமுமெதிருமாயுள்ள இரு சுழலிணைகள் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரே தளத்திலே தாக்கினால், அவை ஒன்றையொன்று சமமாக்கும்.

ஒரு சுழலிணை, p யைப் புயமாகக்கொண்டு, அதன் முனைகளிலே தாக்கும் (P, P) என்னும் இரு விசைகளைக் கொள்க; மற்றைச் சுழலிணை (Q, Q) என்னும் இரு விசைகளைக் கொண்டு q என்னும் புயத்தின் முனைகளில் தாக்குவதாகக் கொள்க.

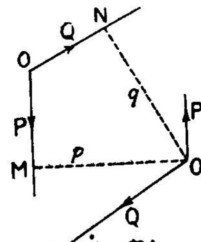
வகை I

P என்னும் விசைகளுள் ஒன்று, Q என்னும் விசைகளுள் ஒன்றை O வில் சந்திக்கவும்; மற்றையிரண்டு விசைகளும் O′வில் சந்திக்கவும்.

O′ விருந்து O′M, O′N என்னும் இரு செங்குத்துக்களை O′ என்பதனூடாகச் செல்லாத விசைகளின் மீது வரைக; ஆயின், இச் செங்குத்துக்களினுடைய நீளங்களானவை முறையை p, q என்பனவாகும்.

அச்சுழலிணைகளுடைய திருப்புத்திறன்கள் அளவிற் சமனுகையால்,
$P.\,p = Q.\,q$

(அ-து) $P.\,O'M = Q\ O'N$ எனின், (அதிகாரம் 5.பிரிவு 5,கி. தே.படி), O' என்பது O விலே தாக்குகின்ற P, Q, என்பனவற்றின் விளைவினது தாக்கக் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகும்.



படம் - 51

ஆயின், OO' என்பது இவ்விளைவினது திசையாகும். இதுபோல, O'இல் உள்ள P, Q என்பனவற்றின் விளைவு $O'O$ என்னுந் திசையில் இருக்கும்.

அன்றியும், Oவில் உள்ள விசைகளானவை முறையே O'இல் உள்ள விசைகளுக்குச் சமமாயும் ஒரே கோணத்தில் தாக்குவனவாயும் இருப்பதால், இவ்விளைவுகள் அளவில் சமமாகும்.

எனின், இவ்விளைவுகள் ஒன்றையொன்று அழிக்கும். ஆகவே, இவ்விரு சுழலிணைகளையும் ஆக்கும் நான்கு விசைகளும் சமநிலையில் இருக்கும்.

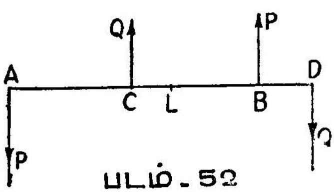
வகை II

அச்சுழலிணைகளை ஆக்கும் விசைகள் இணையாக இருக்கவும்,

அவற்றினுடைய திசைகளுக்குக் குச் செங்குத்தாக வரையும் யாதேனுமொரு நேர்கோடு, அவற்றைப் படத்தில் காட்டியபடி A, B, C,D என்பனவற்றிற் சந்திக்கவும்.

'ஆயின், திருப்புத்திறன்கள் சமனுகையால், நாம் பெறுவது

$$P.AB = Q.CD \quad \text{(i)}$$



படம் - 52

C யிலுள்ள Q, B யிலுள்ள P என்னும் இணைவிசைகளின் விளைவின் பிரயோகப் புள்ளி L ஆகுக.

$$\therefore \quad P.BL = Q.CL \quad \text{(ii)}$$

(i) லிருந்து (ii) ஐக் கழித்தால், நாம்பெறுவது

$$P\,(AB - BL) = Q\,(CD - CL)$$

$$\therefore \quad P.AL = Q.LD$$

ஆயின், L என்பது Aயிலுள்ள P என்ற விசைக்கும், Dயிலுள்ள Q என்ற இணை விசைக்கும் உள்ள விளைவின் பிரயோகப் புள்ளியாகும்.

ஆனால், இவ்விளைவுகள் ஒவ்வொன்றின் அளவு (P+Q) ஆகும். அவை எதிர்த்திசைகள் உடையன. எனின், அவை சமநிலையில் இருக்கும்.

ஆகவே, அவ்விரு சுழலிணைகளை ஆக்கும் நான்கு வகைகளுஞ் சரிக் கட்டிச் சமநிலையில் இருக்கும்.

கி. தே.

ஒரே தளத்தில் சமமுமெதிருமாயுள்ள திருப்புத்திறன்களுடைய இரு சுழலிணைகள் சமப்படுதலால், அச்சுழலிணைகளுள் ஒன்றன் விசைகளுடைய திசைகளை நேர்மாருக்குதலால்,

ஒரே தளத்திற் சமதிருப்புத் திறன்களுடைய எவையேனும் இரு சுழலிணைகள் சமம் என்பது பெறப்படும்.

அன்றியும், சமதிருப்புத் திறன்களுள்ள இரண்டு ஒத்த சுழலிணைகள் இரு மடங்கு திருப்புத்திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம் என்பதும் பெறப்படும்.

5. தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளிலே தாக்கின்ற ஒருதளத்துச் சுழலிணைகள் எத்தொகையாயினும், அச்சுழலிணைகள் எல்லாம், அவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமான திருப்புத் திறன் கொண்டு ஒரேஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

அச்சுழலிணைகள் p புயமுடைய (P, P) என்னும் விசைகளையும், q புயமுடைய (Q, Q) என்னும் விசைகளையும், r புயமுடைய (R, R) என்னும் விசைகளையும், இவ்வாறே பிறவற்றையும் கொண்டன வாகுக.

சுழலிணை (Q, Q) என்பதை, (P, P) என்னும் விசைகளோடு ஒரே தாக்கக் கோடுகளுடைய கூறுகள் கொண்டதாயும், சுழலிணை (Q, Q) விற்குச் சமதிருப்புத் திறனுடையதாயுமுள்ள ஒரு சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்க.

இச்சுழலிணையினுடைய விசைகள் ஒவ்வொன்றும் X ஆனால், முன் பிரிவு கி. தே. படி,

$$X.p = Q.q$$
$$\therefore X = \frac{Q.\ q}{p}$$

இவ்வாறே, சுழலிணை (R, R) என்பதை, தம் விசைகள் (P, P) என்னும் விசைகளோடு ஒரே கோடுகளிலே தாக்குகின்ற $\left(R\ \frac{r}{P}, R\frac{r}{P}\right)$ என்னும் விசைகளைக் கொண்ட ஒரு சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்யவும்.

இது போலவே, பிற சுழலிணைகளையும் மாற்றீடு செய்க. ஆகவே, எல்லாச் சுழலிணைகளும், விசைகள் ஒவ்வொன்றும்

$P+Q.\ \frac{q}{p} + R\frac{r}{p} + \ldots\ldots$ இற்குச் சமனாய், p அளவுடைய புயத்திலே தாக்குகின்ற ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும். இச்சுழலிணையினது திருப்புத்திறன்.

$$\left(P+Q.\ \frac{q}{p} + R\frac{r}{p} + \ldots\ldots\ldots\right)p$$

$$(\text{அ-து})\ P.\,p + Q.q + R.r + \ldots\ldots\ldots$$

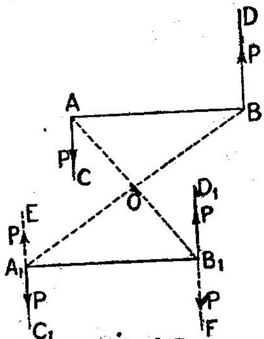
எனின், கொடுத்த சுழலிணைகள் எல்லாம், தம் சுழல் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமனான திருப்புத்திறன் கொண்ட ஒரே ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்.

குறிப்பு :

சுழலிணைகள் எல்லாவற்றிற்கும் ஒரேகுறி இல்லையாயின், ஒவ்வொரு திருப்புத்திறனுக்கும் உரிய குறியை நாம் இட்டால், மேலே கொடுக்கப்பட்ட நிரூபணமே பயன்படும்.

6. தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்குகின்ற ஒரு சுழலிணையை அதனுடைய தளத்திற்கு இணையான எத்தளத்திற்கும், அதன் முந்திய நிலைக்கு இணையாய், அதன்புயம் கிடக்குமாறு மாற்றப்பட்டால், அதன் விளைவு மாறாது.



படம்-53

அச்சுழலிணை AB என்பதைப் புயமாகவுடைய (P, P) என்னும் இரு விசைகளைக் கொண்டனவாகுக. அவற்றினுடைய தாக்கக் கோடுகள் AC, BD என்பன ஆகுக.

$A_1 B_1$ என்பது ABயிற்குச் சமனும் இணையுமாகிய யாதேனுமொரு கோடு ஆகுக.

$A_1 C_1$, $B_1 D_1$ என்பனவற்றை முறையே AC, BD என்பனவற்றிற்கு இணையாய் வரைக.

A_1இல் ஒவ்வொன்றும் Pக்குச் சமனாய், அவற்றுள் ஒன்று $A_1 C_1$ திசையிலும், மற்றையது எதிர்த்திசை A_1E யிலும் தாக்குகின்ற இரு சமவெதிர்விசைகளை உள்இடுக. இதேபோல, B_1 இல் ஒவ்வொன்றும் Pக்குச்சமனாய், அவற்றுள் ஒன்று $B_1 D_1$ திசையிலும், மற்றையது அதற்கு எதிர்த்திசை B_1 F இலுமாய்த் தாக்குகின்ற இரு சமவெதிர் விசைகளை உள் இடுக.

இவ்விசைகளின் காரணமாக அப்பொருளின் சமநிலையில் யாதொரு விளைவுமிருக்காது.

AB_1, A_1B என்பனவற்றை ஒன்றுசேர். அவை Oவில் சந்திக்கட்டும்.

எனின், O என்பது AB_1, A_1 B என்னும் இவை யிரண்டின் மையமாகும்.

Bயில் உள்ள விசை P என்பதற்கும், A_1 E யில் செயல்படும் P என்ற விசைக்கும் உள்ள விளைவு Oவில் BDக்கு இணையாகச் செயல்படும் 2 P என்ற விசையாகும். Aயில் உள்ள விசை Pக்கும், B_1 F இல் செயல்படும் P என்ற விசைக்கும் உள்ள விளைவு, Oவில், ACக்கு இணையாகச் செயல்படும் 2P என்ற விசையாகும். இவ்விரு விளைவுகளும், சமனுமெதிருமாயிருப்பதால், அவை ஒன்றையொன்று சமமாக்கும்.

ஆகவே, A_1, B_1 என்பனவற்றிலே, $A_1 C_1$, $B_1 D_1$ என்னுந் திசைகளிலே (அதாவது முந்திய சுழலிணையினுடைய விசைகளினுடைய

திசைகளுக்கு இணையாய்) தாக்குகின்ற (P, P) என்னும் இரு விசைகள் எஞ்சி நிற்கின்றன.

அன்றியும் A_1C_1, B_1D_1 என்பனவற்றினூடாகச் செல்லுந் தளம் AC, BD என்பனவற்றினூடாகச் செல்லுந் தளத்திற்குச் சமாந்தரமாய் இருக்கிறது; எனவே, தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

கி. தே.

இத்தேற்றத்திலிருந்தும், பிரிவு 4. கி. தே. படியும், இரு சுழலிணைகளுடைய திருப்புத்திறன்கள் ஒரே அளவுடையவாயின், ஒரு சுழலிணையை ஒரு இணைதளத்திலுள்ள மற்றைய சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்யலாம் என்று முடிவுகொள்ளலாம்.

7. தேற்றம்

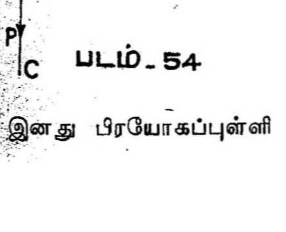
ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரேதளத்திலே தாக்குகின்ற ஒரு தனிவிசையும் ஒரு சுழலிணையுஞ் சேர்ந்து சமநிலையை உண்டு பண்ணமுடியாது. ஆனால், அவை முந்திய திசைக்கு இணையான யான திசையிலே தாக்குகின்ற ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாகும்.

அச்சுழலிணையின் விசைகள் ஒவ்வொன்றும் Pயிற்குச் சமனுகுக. அவற்றினுடைய தாக்கக்கோடுகள் முறையே OB, O_1C ஆகுக.

தனி விசை Q என்பதாகுக.

வகை I

Q என்பது அச்சுழலிணையினுடைய விசைகளுக்கு இணையில்லாவிடின், அது அவற்றுள் ஒன்றை O வில் சந்திக்குமாறு நீட்டுக. இப்பொழுது, O விலே தாக்குகின்ற P, Q என்னும் விசைகளின் விளைவு R எனின், அதன் தாக்கக்கோடு OA, OB க்கு இடையே இருக்க வேண்டும். இதை OL எனக் கொள்வோம்.



படம் - 54

OL என்பது அச்சுழலிணையின் மற்றை விசையை O_1 என்பதில் சந்திக்குமாறு (தேவையாயின் பிற்பக்கத்திற்காயினும்) நீட்டப்படட்டும். R இனது பிரயோகப்புள்ளி O_1 இற்குக் கொண்டு செல்லுக.

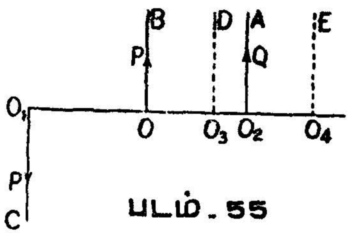
O_1, A_1 ஐ OA க்கு இணையாக வரைக

இப்பொழுது, விசை R ஐ திசை O_1 A_1 என்பதிலே தாக்குகின்ற Q என்னும் ஒரு விசையையும், O_1 Cயிற்கு எதிர்த்திசையிலே தாக்குகின்ற P என்னும் ஒரு விசையாயும் பிரிக்கலாம்.

P என்னும் பின்னதாகிய இவ்விசை O_1C திசையிலே தாக்குகின்ற சுழலிணையின் இரண்டாம் விசை Pயினலே சமமாக்கப்படுகின்றது.

எனின், முந்திய திசை OA யிற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள O_1 A_1என்னுந் திசையிலே தாக்குகின்ற Q என்னும் விசையே அத்தொகுதியின் விளைவாக நமக்கு மீந்துள்ளது.

வகை II



படம் - 55

விசை Qஆனது அச்சுழலிணையினுடை விசைகளுக்கு இணையாகுக.

O_1O என்பது Q என்னும் விசையை O_2 இல் சந்திக்க; Oவிலுள்ள P, O_2 இலுள்ள Q என்னும் ஒத்த இணைவிசைகளின் விளைவு (P+Q) என்னுமொரு விசைக்குச் சமன். இது OO_2 என்பதற்கிடையே உள்ள O_3 என்னுமொரு புள்ளியில் OB என்னும் திசைக்கு இணையாகச் செயல்படும்

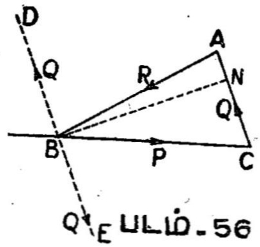
இப்பொழுது O_3 லுள்ள (P+Q), O_1லுள்ள P என்னும் ஒவ்வாத இணைவிசைகளின் விளைவு (P+Q−P)+Q விற்குச் சமனும், O_3 D திசைக்கு இணையாக O_1 O_3 யை, வெளியே பிரிக்கும் O_4 என்னும் புள்ளியில் செயல்படும்.

எனின், அத்தொகுதியின் விளைவு முந்திய, தரப்பட்ட விசைக்கு இணையான திசையிலே தாக்குகின்ற Q என்னுந் தனி விசைக்குச் சமன்.

8. தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள் அளவு, திசை, தாக்கக் கோடு என்பனபற்றி ஒரொழுங்கிலே எடுத்த ஒரு முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்களால் குறிக்கப்பட்டால், அவை அம் முக்கோணப் பரப்பின் இரு மடங்கால் குறிக்கப்படும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்.

ABC என்பது முக்கோணமாகுக, P, Q, R என்பன அம்முக்கோணத்தினுடைய பக்கங்கள் BC, CA, AB என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் விசைகளாகுக.



படம் - 56

B யின் வழியாக DBE என்பதை ACக்கு இணையாக வரை. B யில் Q விற்குச் சமனான இரு சமவெதிர் விசைகளை BD, BE என்னுந் திசைகளிலே தாக்குமாறு ஏற்படுத்துக.

விசை முக்கோணத்தின்படி, BD யின் நீளவாட்டில் செயல்படும் விசை Q, B யில் செயல்படும் விசைகள் P, R என்பன சமநிலையில் இருக்கும். எனின், ஒவ்வொன்றும் Q விற்குச் சமனாய் முறையே CA, BE என்னுந் திசைகளிலே தாக்குகின்ற இரு விசைகளே நமக்கு மீந்துள்ளன.

B யிலிருந்து AC க்குச் செங்குத்தாக BN ஐ வரை.

இவ்விசைகள் $Q \times BN$ என்பதைத் தனது திருப்புத் திறனாகவுள்ள ஒரு சுழலிணையை உண்டாக்கும்.

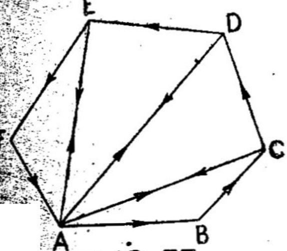
அன்றியும், $Q \times BN = AC \times BN = 2 \times \frac{1}{2} AC \times BN$

= முக்கோணம் ABC யின் பரப்பின் இரு மடங்கு.

கி. தே.

மேற்கண்ட முடிவு எத்தொகை விசைகளுக்கும் உண்மை எனக் காட்டலாம்.

ஒரு சட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது தாக்குகின்ற ஒரு தளத்து விசைத் தொகுதியொன்று, அளவு, திசை, தாக்கக்கோடு என்பனபற்றி ஒருபல் கோணத்தினுடைய பக்கங்களால் குறிக்கப்பட்டால், அவை அப்பல் கோணப்பரப்பின் இருமடங்காற் குறிக்கப்படுந் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.



படம் - 57

அவ்விசைகள் ABCDEF என்னும் பல் கோணத்தின் பக்கங்களாகிய AB, BC, CD, DE, EF, FA என்பனவற்றால் அளவு, திசை, தாக்கக்கோடு என்பன பற்றிக் குறிக்கப்படட்டும். AC, AD, AE என்பனபவற்றினூடாக அவற்றால் முற்றிலும் குறிக்கப்பட்ட சமனுமெதிருமான விசைகளை உள் இடுக.

இப்பொழுது, ABC என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய AB, BC, CA என்பனவற்றால் குறிக்கப்பட்டும், இப்பக்கங்களையே தாக்கக் கோடுகளாகவும் கொண்ட விசைகள், 2△ ABCயால் குறிக்கப்படுந் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

இதுபோலவே, △ACD, △ADE △AEF என்பனவற்றின் பக்கங்களால் திசை, அளவு, தாக்கக் கோடு என்பனபற்றிக் குறிக்கப்படும் விசைகள் முறையே,

2△ ACD, 2△ ADE, 2△ AEF என்று குறிக்கப்படுந் திருப்புத் திறன்களையுடைய சுழலிணைகளுக்குச் சமமாகும்.

இப்பொழுது இந்த நான்கு சுழலிணைகளும் ஒரே சுழலிணைக்குச் சமமாகும்.

அத் தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன், அந்நான்கு சுழலிணைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமம்.

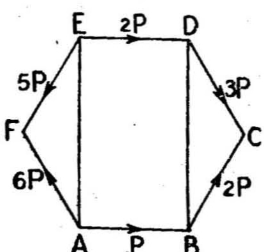
ஆகவே, அத் தனிச் சுழலிணையின் திருப்புத்திறன்,

$$=2(\triangle ABC+\triangle ACD+\triangle ADE+\triangle AEF)$$

=பல்கோணம் ABCDEF இன் பரப்பின் இரு மடங்கு,

9. உதாரணம் :

ABCDEF என்பது ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணம். அதன் பக்கங்கள் AB, BC, DC, ED, EF, AF என்பனவற்றினூடாக முறையே விசைகள் P, 2P, 3P, 2P, 5P, 6P, என்பன செயல்படுகின்றன. இந்த ஆறு விசைகளும் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக்காட்டி, அதன் திருப்புத் திறனைக் கண்டுபிடி.



படம்-58

AE என்பது AB க்குச் செங்குத்தாக இருக்கின்றது. எல்லா விசைகளையும் AB, ED திசைகளிலும், AE, DB திசைகளிலும் பிரிக்க, நாம் பெறுவதாவது

AB யின் திசையில் கூறுகள் :

$$P+2P\cos 60^\circ-6P\cos 60^\circ=-P$$

ED யின் திசையில் கூறுகள் :

$$2P+3P\cos 60^\circ-5P\cos 60^\circ=P$$

(அ-து) BA திசையில் P என்ற விசையும், ED திசையில் P என்ற விசையும் நாம் பெறுகிறோம்,

இவை ஒரு சுழலிணையாகும். இதன் திருப்புத்திறன்

$$= P \times AE = P \times a\sqrt{3} \quad \text{(i)}$$

மேலும், AE, DB திசைகளில் விசைகளின் கூறுகளான :

AE யின் திசையில் கூறுகள் $= 6P \cos 30° - 5P \cos 30°$

$$= P \cos 30° = P \frac{\sqrt{3}}{2}$$

DB யின் திசையில் கூறுகள் $= 3P \cos 30° - 2P \cos 30°$

$$= P \cos 30° = P \frac{\sqrt{3}}{2}$$

இவ்விரு விசைகளும் ஒரு சுழலிணையாகும்.

இதன் திருப்புத் திறன் $= P \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB = P \frac{\sqrt{3}}{2} a$ (ii)

இவ்விரு சுழலிணைகளின் திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்

$$\text{தொகை} = P \times a\sqrt{3} + P \times \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$= {}^{3}\ \sqrt{3}\, Pa$$

பயிற்சி 6:

1. ABCD என்பது ஒரு நாற்கரத் தகடு. இதில் AB = 5 cms, BC = DC = DB = 4 cms ; AD = 3 cms. AB, BC, CD, DA என்பனவற்றின் நீளவாட்டில் முறையே 10, 8, 8, 6 கிராம் எடைகள் தாக்குகின்றன. அவ்விசைகள், ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக்காட்டி அதன் திருப்புத் திறனைக் கணக்கிடு.

2. ABCDEF என்பது ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணம், அதன் பக்கங்கள் BA, BC, DC, ED, EF, AF என்பனவற்றினூடாக முறையே P, 2P, 3P, 4P, 5P, 6P என்ற விசைகள் தாக்குகின்றன. இந்த ஆறு விசைகளும் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக் காட்டி அதன் திருப்புதிறனைக் காண்க.

3. ABCD என்பது ஒரு செவ்வகம். அதன் அடுத்துள்ள பக்கங்கள் AB, BC என்பனவற்றின் நீளம் முறையே 8 செ. மீ, 3 செ. மீ; அதன் பக்கங்கள் BA, BC, DC, DA என்பனவற்றினூடே முறையே

16P, 5P, 16P, 9P கிராம் எடையுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. அவற்றின் விளைவைக் காண்க.

4. ABCD என்பது தன்பக்கம் 2 அடியாயுள்ள ஒரு சதுரம். AB, BC, CD, DA என்பனவற்றினுடைய நீளத்திற்கு 3, 4, 8, 5 இரு. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகளும், AC, DB என்பனவற்றினுடைய நீளத்திற்கு $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ என்னும் இரு. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகளும் தாக்குகின்றன. அவை 20 அடி-இரு. எடைக்குச் சமமான திருப்புத்திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

5. ABCD என்னுஞ் சதுரத்தினுடைய AB, CD என்னும் பக்கங்களின் நீளத்திற்கு ஒவ்வொன்றும் 3 இரு. எடைக்குச் சமமான விசைகளும், AD, CB என்னும் பக்கங்களின் நீளத்திற்கு ஒவ்வொன்றும் 7 இரு. எடைக்குச் சமமான விசைகளுந் தாக்குகின்றன. அச்சதுரத்தின் பக்கம் 3 அடியாயின், சமநிலை கொடுக்கும் சுழலிணையினது திருப்புத்திறனைக் காண்க.

6. AB என்னும் எடையில்லாத கிடைச்சட்டமொன்று Aயில் 2 இரு. எடையுள்ள நிலைக்குத்தான கீழ்முக விசையாலும், Bயில் 2இரு. எடையுள்ள நிலைக்குத்தான மேன்முக விசையாலும், அன்றியும், அச்சட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட C என்னும் புள்ளியில் அச்சட்டத்திற்கு 30° சாய்ந்த 8 இரு. எடையுள்ள கீழ்முக விசையாலும் தாக்கப்படுகின்றது. இவற்றைச் சமப்படுத்துதற்கு அச்சட்டத்தில் எப்புள்ளியில் ஒரு விசை பிரயோகப்படுத்தப்படவேண்டும் என்று காண்க. மேலும் அவ்விசையினுடையது அளவு, திசைகளையும் காண்க.

7. ABCDEF என்பது ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணம். AB, CB DE, FE என்பனவற்றினுடைய நீளத்திற்கு முறையே 3, 7, 3, 7 என்னும் இரு. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. இவற்றைச் சமப்படுத்த, CD, FA என்பனவற்றின் நீளத்திற்கு ஒவ்வொன்றும் எத்தனை இரு. எடைக்குச் சமமான விசை தாக்கவேண்டும்?

8. ABCD என்பது தன்பக்கம் 2 அலகு நீளங்கொண்ட ஒரு சதுரமாகும். ஒரொழுங்கில் எடுத்த AB, BC, CD, DA என்னும் பக்கங்களின் நீளவாட்டில் முறையே a, b. c, d என்னும் விசைகளும், AC, DB, வழியே முறையே $P\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ என்னும் விசைகளும் தாக்குகின்றன. $p+q=c-a$, $p-q=d-b$ எனின், இவ்விசைகள், $(a+b+c+d)$ க்குச் சமனான திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் BC, CA, AB என்ற பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றையும் முறையே P, Q, R என்ற புள்ளிகள் $1+k$; $1-k$ என்னும் ஒரேவிகிதத்தில், ஒரே ஒழுங்கில் பிரிக்கின்றன. முக்கோணத்தின் பரப்பு $\triangle$ எனில், AP, BQ, CR என்பனவற்றால் குறிக்கப்படும் விசைகள் $2k\triangle$ என்ற திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகுமெனக் காட்டுக.

10. P, Q, R, என்ற மூன்று விசைகள் ABC என்ற முக்கோணத்தின் கோண முனைகளில், அம்முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் தொடு கோடுகள் வழியே செயல்படுகின்றன. இவ்விசைகள் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமானல்,

$P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$ எனக் காட்டுக.

7. ஒருதளத்திலே மூன்று விசைகளினாலே தாக்கப்படுகின்ற ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின் சமநிலை

(Equilibrium of a Rigid Body acted on by three forces in a plane)

தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள் அப்பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருந்தால். அவை ஒரு புள்ளிற் சந்திக்கவேண்டும் அல்லது சமாந்தரமாக வேண்டும்.

வகை I



படம் - 59

அவ்விசைகள் எல்லாம் சமாந்தரமல்லவாயின், அவற்றுள் இரண்டாயினுஞ் சந்தித்தல் வேண்டும். இந்த இரண்டு P, Q என்பனவாகுக; இவற்றினுடைய திசைகள் O வில் சந்திக்கட்டும். இப்பொழுது P, Q என்பவற்றின் விளைவு O வழியே செல்லும் யாதேனுமொரு விசையாதல் வேண்டும். ஆனால், P, Q, R என்ற விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றமையால், P, Q என்பவற்றின் விளைவு R என்பதைச் சமப்படுத்தல் வேண்டும்.

ஆனால், ஒரே தாக்கக் கோட்டில் இருந்தாலன்றி, இரு விசைகள் ஒன்றையொன்று சமமாக்கமுடியாது. ஆகவே, R இன் தாக்கக்கோடும் O வழிச் செல்ல வேண்டும்.

வகை II P, Q என்பன சமாந்தரமாகட்டும்.

P, Q என்ற விசைகள் சமாந்தரமாக இருந்தால், அவற்றின் விளைவு அவைகளுக்கு இணையாக இருக்கும். மூன்று விசைகளும் சமநிலையில் இருப்பதால், R என்பது P, Q என்பவற்றின் விளைவுக்குச் சமனுமெதிருமாகவும் அவ்விளைவின் தாக்கக் கோட்டிலேயே செயல்பட வேண்டும். ஆகவே, R என்ற விசையின் திசை, P, Q என்ற விசைகளின் திசைக்கு இணையாக இருக்கவேண்டும்.

எனவே, P, Q, R என்ற திசைகள் எல்லாம் ஒன்றுக்கொன்று இணையாகும்.

2. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள்மீது ஒரே தளத்தில் உள்ள மூன்று விசைகள் தாக்கி, அதைச் சமநிலையில் வைத்திருந்தால், அவை ஒரு புள்ளியில் சந்திப்பதால், சமநிலை நிபந்தனைகள் ஒரு தனித் துகளினுடைய நிபந்தனைகளுக்கு ஒடுங்குமென்பதைக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, இலாமியினது (Lami) தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது அவ்விசைகளைச் செங்கோணங்களிலுள்ள இரு திசைகளிற் பிரித்தோ அல்லது ஒரு வரைப்பட அமைப்பின் துணைகொண்டோ வேண்டிய நிபந்தனைகளை நாம் பெறலாம்.

3. கோண கணிதத் தேற்றங்கள் (Trigonometrical Theorems)

நிலையியல் கணக்குகளுக்குப் பயன்படுகின்ற கோண கணிதத் தேற்றங்கள் இரண்டு உண்டு. அவை, பின் வருமாறு:

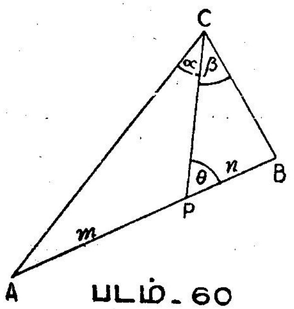
P என்பது ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தின் அடியாகிய AB யில் உள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியாயிருக்க, CP என்பது AB யை m, n என்னும் இரு பகுதிகளாகவும், C என்ற கோணத்தை α, β என்னும் பகுதிகளாகவும் பிரிக்க, கோணம் CPB என்பது θ ஆக இருந்தால்

$$(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta \quad \text{(i)}$$

$$(m+n)\cot\theta = n\cot A - m\cot B \quad \text{(ii)}$$

என நிரூபி.

நிரூபணம் :



படம் - 60

(i) $\frac{m}{n} = \frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PC}\frac{PC}{PB}$

$= \frac{\sin ACP}{\sin PAC} \cdot \frac{\sin PBC}{\sin PCB}$

$= \frac{\sin \alpha}{\sin(\theta - \alpha)} \cdot \frac{\sin(\theta+\beta)}{\sin \beta}$

[ஏனெனில் $\angle PBC = 180° - (\beta+\theta)$]

$= \frac{\sin \alpha (\sin\theta \cos\beta + \cos\theta \sin\beta)}{\sin\beta (\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha)} = \frac{\cot\beta + \cot\theta}{\cot\alpha - \cot\theta}$

$\therefore (m+n) \cot\theta = m \cot\alpha - n \cot\beta$

(ii) $\frac{m}{n} = \frac{\sin ACP}{\sin PAC} \cdot \frac{\sin PBC}{\sin PCB}$

$= \frac{\sin(\theta - A)}{\sin A} \cdot \frac{\sin B}{\sin(\theta + B)}$

$= \frac{(\sin\theta \cos A - \cos\theta \sin A) \sin B}{\sin A (\sin\theta \cos B + \cos\theta \sin B)}$

$= \frac{\cot A - \cot\theta}{\cot B + \cot\theta}$

$\therefore (m+n) \cot\theta = n \cot A - m \cot B$

3. நிலையியல் கணக்குகளுக்கு விடை காண்பதற்குப் பின்வரும் முறையை மேற்கொள்ளவேண்டும்,

1. கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கேற்பப் படம் வரைய வேண்டும்.

2. பொருளின்மேல் செயல்படும் எல்லா விசைகளையும் குறிக்க வேண்டும்.

அவ்விதம் குறிக்கும்போது, கீழ்க்கண்டவற்றைக் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

(i) ஒரு பொருளின் எடை அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வழியே நிலைக்குத்தில் நேர்கீழாகக் காட்டப்படவேண்டும்.

(ii) ஒரு பொருள் ஒரு வழவழப்பான பரப்பின்மீது அழுத்தும் போது, எதிர்த் தாக்க விசை அப்பரப்பிற்குச் செங்குத்தாகக் குறிக்கப் பட வேண்டும்.

(iii) ஒரு கோலொன்று ஒரு வழவழப்பான முளைக்கட்டையின் மேல் தங்கியிருந்தால், முளைக்கட்டையின் எதிர்த் தாக்கம் கோலுக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும்.

(iv) ஓர் இலேசான இழையிலுள்ள இழுவிசை, அந்த இழை முழுவதும் ஒன்றுகவே இருக்கும். அன்றியும், இழை வழவழப்பான முளைக்கட்டையின் மீதோ அல்லது கப்பிகளின் மூலமோ செல்லும் பொழுது, இந்த இழுவிசை மாறுதிருக்கும்.

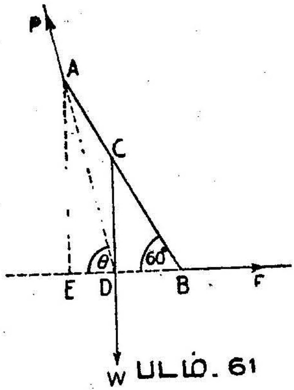
3. மூன்றே விசைகள் இருக்கும் பொழுது, அவை இணையாக இல்லையேல் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கும் என்பதைக்கொண்டு, பொருளின் நிலைகளைக் காட்டக்கூடிய படத்தை வரையலாம்.

4. இலாமியின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தியோ அல்லது விசை முக்கோணத் தேற்றத்தின் உதவியாலோ அல்லது அவ்விசைகளைச் செங்கோணங்களிலுள்ள இரு திசைகளில் பிரித்தோ அல்லது ஒரு வரைப் பட அமைப்பின் துணை கொண்டோ அல்லது வடிவ கணித, கோண கணித சம்பந்தங்களாலோ, வேண்டிய நிபந்தனைகளை நாம் பெற முடியும்.

4. உதாரணம் 1

AB என்னும் பாரமான ஒரு சீர்க் கோலொன்று A யிலே ஒரு நிலைப் புள்ளிக்கு பிணையலாலே இணைக்கப்பட்டு,(hinged at A to a fixed point) B என்னுங் கீழ்முனையிற் பிரயோகிக்கப்பட்ட $\mathcal{F}$ என்னும் ஒரு கிடை விசையினுலே தாக்கப்பட்டு, அடிவானத்திற்கு 60° யிற் சாய்ந்த ஒரு நிலையில் ஓய்வில் இருக்கின்றது. அப்பிணையலிலுள்ள தாக்கத்தையும், $\mathcal{F}$ இன் அளவையுங் காண்க.

அக்கோலின் மையம், C வழியாக வரையப்படும் நிலைக்குத்து B வழி யாகச் செல்லுங் கிடைக்கோட்டை Dயில் சந்திக்கட்டும். அக்கோலினது எடை W ஆகுக,



படம். 61

அக்கோலின்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் மூன்றே; அவை, விசை F, எடை W, பிணையலினது தேராவெதிர்த் தாக்கம் P என்பன.

ஆகவே, இம்மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கவேண்டும்.

இப்பொழுது, F, W என்பன D யில் சந்திக்கின்றன. எனின், பிணையலிலுள்ள தாக்கத்தினது திசை DA ஆகவேண்டும்.

AE என்பதை BD க்குச் செங்குத்தாக வரைக.

$\angle ADE = \theta$ எனக் கொள்க.

ஆயின், $\tan\theta = \dfrac{AE}{ED} = \dfrac{2AE}{2ED} = \dfrac{2AE}{EB} = 2\tan 60^\circ$

$= 2\sqrt{3}$

இப்பொழுது, இலாமியின் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{F}{\sin WDA} = \frac{W}{\sin ADB} = \frac{P}{\sin WDB}$$

(அ-து) $\dfrac{F}{\sin(90^\circ+\theta)} = \dfrac{W}{\sin(180^\circ-\theta)} = \dfrac{P}{\sin 90^\circ}$

$$\therefore F = W\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = W\cot\theta = \frac{W}{2\sqrt{3}} = \frac{W\sqrt{3}}{6}$$

அத்துடன், $P = W\dfrac{1}{\sin\theta} = W\sqrt{1+\cot^2\theta} = W\sqrt{\dfrac{13}{12}}$

வேறுவழி :-

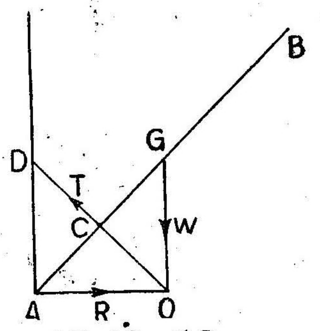
ADE என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் D யில் செயல்படும் மூன்று விசைகளுக்குச் சமாந்தரமாகையால், அது, ஒரு விசை முக்கோணமாகும். ஆகவே, θ என்பது அளக்கப்படக்கூடியது.

அன்றியும், $\dfrac{P}{AD} = \dfrac{F}{ED} = \dfrac{W}{AE}$

உதாரணம் 2

AB என்னும் பாரமான ஒரு சீரான கோலொன்றின் A என்னும் முனை வழுவழுப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடுகின்றது. ஓரிழை யின் ஒரு முனை அக்கோலிலுள்ள ஒரு புள்ளி Cயிற்கு, AC$=\frac{1}{4}$ AB ஆகும் படி இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது; மற்றை முனை அச்சுவருக்கு இணைக் கப்பட்டிருக்கின்றது. அக்கோலானது, நிலைக்குத்திற்கு ஒரு கோணத் தில் சாய்ந்த நிலையிலிருந்தால், அவ்விழையினது நீளத்தைக் காண்க.

சுவருக்கு இணைக்கப்பட்ட புள்ளி Dஆகுக. சமநிலைக்கு, கோலின் மையப் புள்ளி G வழியே செயல்படும் அதன் எடை Wவின் தாக்கக் கோடும், Aஇல் கிடையாக உள்ள சுவரின் எதிர்த் தாக்க மாகிய R உம், இழையில் உள்ள இழு விசையாகிய T யும் ஒரே புள்ளி O வழிச் செல்ல வேண்டும்.



படம் 62

AOG என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில், C என்பது கர்ணம் AGஇன் மையப்புள்ளி [$\because$ AC$=\frac{1}{4}$ AB$=\frac{1}{2}$ AG]

$$\therefore OC=AC=CG$$

$$\therefore \angle CAO=\angle COA \text{ (அ-து) } \angle GAO=\angle DOA \quad (i)$$

இப்பொழுது AOD, AOG என்ற இரண்டு முக்கோணங்களில்,

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} AO \text{ பொதுப் பக்கம்} \\ \angle AOG=\angle OAD \text{ (செங்கோணம்)} \\ \angle GAO=\angle DOA \text{ [(i) இன்படி]} \end{array} \right.$$

$\therefore$ இரு முக்கோணங்களும் சர்வ சமம்.

$$\therefore OD=AG=\tfrac{1}{2} AB$$

ஆனால், OC$=$AC$=\frac{1}{4}$ AB

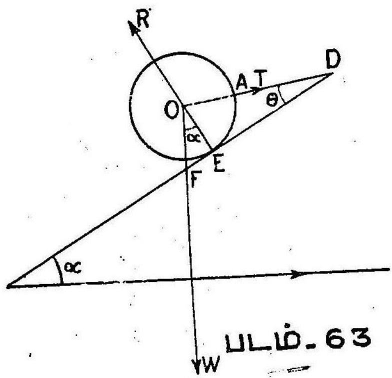
ஆகவே, CD$=\frac{1}{4}$ AB

உதாரணம் 3

ஒருகோளத்தின் ஆரம் 'a' க்குச்சமம்; அதன் எடை W ஆகும். L நீளமுள்ள ஒரு இழையின் ஒரு முனையை, அக்கோளத்தின் மேற் பரப்பில் உள்ள ஒரு புள்ளிக்குக் கட்டி, அதன் மற்ற முனையை ஒரு சாய்தளத்தில் ஒரு புள்ளிக்கு இணைத்து, அச்சாய்தளத்தின் மீது அக்

கோளம் ஒய்வு நிலையில் தாங்கப்படுகிறது. வழவழப்பாயுள்ள அச்சாய் தளம் அடிவானத்திற்கு a கோணத்தில் சாய்ந்திருந்தால், இழையின்

இழுவிசை $\dfrac{W(a+l)\ \sin a}{\sqrt{l^2+2al}}$ எனக் காட்டுக.



படம்-63

கோளத்தைச் சமநிலையில் வைக்கும் விசைகளாவன :

(i) கோளத்தின் மையம் O வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும் கோளத்தின் எடை W

(ii) சாய்தளத்தைக் கோளம் E என்னும் புள்ளியில் தொட்டால், EO வழியே செயல்படும் சாய்தளத்தின் எதிர்த் தாக்க விசை R

(iii) இழையானது A என்ற புள்ளியில் கோளத்திற்கும், D என்ற புள்ளியில் சாய்தளத்திற்கும் இணைக்கப்பட்டால், AD வழியே செயல்படும் இழுவிசை T

மூன்றே விசைகள் கோளத்தைத் தாக்குவதால், அவை ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லவேண்டும்.

ஆகவே, DA யின் நீட்சி O வழியாகச் செல்லவேண்டும். படத்திலிருந்து, $\angle EOF = a$ ஆகவேண்டும் எனக் காணலாம்.

AD என்னும் இழை சாய்தளத்துடன் θ அளவு கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கட்டும்.

இலாமியின் தேற்றத்தின்படி,

$$\frac{W}{\sin(90+\theta)} = \frac{T}{\sin a} = \frac{R}{\sin(90-\theta+a)}$$

$$\therefore T = \frac{W \sin a}{\sin(90+\theta)} = \frac{W \sin a}{\cos\theta}$$

அன்றியும். $\sin \theta = \frac{a}{a+l}$

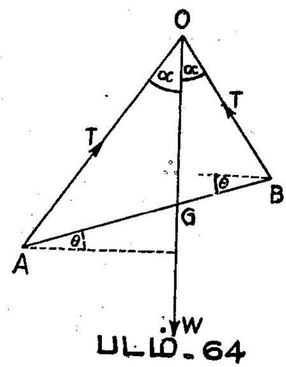
$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{(l+a)^2 - a^2}}{l+a} = \frac{\sqrt{l^2+2al}}{l+a}$$

ஆகவே $T = \frac{W \quad (l+a)}{\sqrt{l^2+2\,al}} \sin \alpha$

உதாரணம் 4

5 அடி நீளமுள்ள ஒரு கோலின் புவியீர்ப்பு மையம், அதனை 4 : 3 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றது, அக்கோலிற்கு அதன் முனைகளிற் கட்டப்பட்ட 7 அடி நீளமுடைய ஓரிழையுண்டு. அவ்விழை மழமழப்பான ஒரு சிறு முளைக்கட்டையின் மேலே தொங்கவிடப்படுகிறது. அக்கோலானது (நிலைக்குத்தல்லாத நிலையிற்) சமநிலையை அடைந்தால், அடிவானத்திற்கு அக்கோல் $\tan^{-1}\frac{1}{7}$ என்னுங் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமென்றும், அவ்விழையின் இழுவிசைக்கு, அக்கோலினது எடை $\sqrt{2} : 2$ என்னும் விகிதத்தில் இருக்குமென்றுங் காட்டுக.

AB என்பது அக்கோலாகுக; G என்பது அதன் புவி ஈர்ப்பு மையமாகுக. O என்பது முளைக்கட்டையைக் குறிக்க. θ என்பது அடி வானத்தோடு அக்கோலின் சாய்வாகுக.



படம். 64

இப்பொழுது, மூன்று விசைகளே அக்கோலின்மீது தாக்குவதால், அவை ஒரு புள்ளியிற் சந்தித்தல் வேண்டும்.

ஆனால், இழுவிசைகள் இரண்டும் O வழியே செல்கின்றன. எனின், எடை W வினது தாக்கக்கோடும் O வழியே செல்லவேண்டும்.

ஆகவே, OG நிலைக்குத்தாதல் வேண்டும்.

இனி, அவ்விழை மழமழப்பான ஒரு முளைக்கட்டையைச் சுற்றிச் செல்கின்றமையால், அவ்விழையின் இழுவிசை T என்பது மாறுது.

எனின், W ஆனது இருசம விசைகளைச் சமநிலையடையச் செய்கின்றது.

ஆகவே, அது அவற்றிடையே கிடக்குங் கோணத்தை இருசமக் கூறிடும்.

$\therefore\ \angle AOG = \angle BOG = \alpha$, என்க.

எனின். வடிவ கணிதத்தால்,

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AG}{GB} = \frac{4}{3}$$

அன்றியும். $AO + OB = 7$

$\therefore\ AO = 4;\ OB = 3$ எனப் பெறுகிறோம்.

அன்றியும், முக்கோணம் AOB யில், $AO = 4,\ \ OB = 3,$

$AB = 5$ ஆதலால், $AB^2 = AO^2 + OB^2$ எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, $\angle AOB$ ஒரு செங்கோணமாகும்.,

$\therefore\ \alpha = \angle AOG = \angle BOG = 45°.$

இனி, முக்கோணம் AOGயில், $\angle AGO = 90° + \theta$ ஆகும்.

எனவே, $\dfrac{AG}{\sin\alpha} = \dfrac{AO}{\sin(90 + \theta)}$

(அ–து) $AG \cos\theta = AO\ \sin\alpha$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{AO}{AG}\ \sin\alpha$$

$$= \frac{4}{\frac{4}{7} \times 5} \sin\alpha$$

$$= \frac{7}{5} \sin\alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{1}{7}$$

$$\therefore\ \underline{\theta = \tan^{-1}\frac{1}{7}}$$

அன்றியும், அவ்விசைகளை, நிலைக்குத்தாகப் பிரிக்க நாம் பெறுவது

$$W = 2T\cos\frac{2\alpha}{2} = 2T\cos\alpha$$

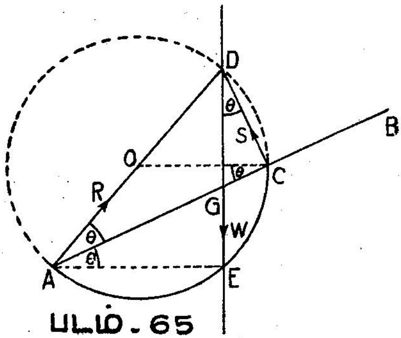
$$\therefore \frac{W}{T} = 2\cos\alpha = 2\cos 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore T : W = \sqrt{2} : 2$$

உதாரணம் 5

4 அங்குல நீளமுள்ள ஒரு சீர்க்கோலொன்று ஆரை $\sqrt{3}$ அங்குலமாயும், அச்சு நிலைக் குத்தாயும், உள்ள ஒரு மழமழப்பான அரைக் கோள கிண்ணத்திற்குள்ளே அதன் ஒருமுனை இருக்கும்படியாக வைக்கப் பட்டிருக்கின்றது. அக்கோலின் காற்பங்கு, அக்கிண்ணத்தின் விளிம்புக்கு மேலாக நீண்டிருக்குமெனக் காட்டுக.

மேலும், அவ்வாறு கிடக்கும் மிகக் குறுகிய கோல் $2\sqrt{2}$ அங்குல நீளமாகுமென நிறுவுக.



படம் - 65

படம் அக்கோலினூடாகச் செல்லும் அரைக்கோளத்தினது, நிலைக்குத்து வெட்டு முகத்தைக் குறிக்கவும்.

AB என்பது அக்கோலையும், G என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தையும், C என்பது அக்கோல் அக்கிண்ணத்தின் விளிம்பைச் சந்திக்கும் புள்ளியையும் குறிக்க. கிண்ணத்தின் மையம் O ஆகுக.

A இல், A இன் கூடாக அக்கிண்ணத்தின் மேற் பரப்பிற்குச் செங்குத்தாய் உள்ளது. AO என்னும் ஒரே கோடாதலால், A யில் உள்ள எதிர்த் தாக்கம் AO வழியே செயல்படவேண்டும்.

அன்றியும், C யில் உள்ள எதிர்த் தாக்கம், அக்கோலிற்குச் செங்குத்தாய்ச் செயல்படும். இதற்குக் காரணம், கோலிற்கும், கிண்ண விளிம்புக்கும் செங்குத்தாய் உள்ளது, இச்செங்குத்தின் திசையேயாகும்.

இந்த இரண்டு எதிர்த் தாக்கங்களும் D யில் சந்திக்கட்டும்.

எனின், G வழியே செயல்படும் அதன் எடையின் தாக்கக் கோடு D வழியே செல்லவேண்டும். ஆகவே, DG நிலைக்குத்தாகும்.

A வழியாக DG என்னும் நிலைக்குத்தை E யில் சந்திக்குமாறு AE என்னும் கிடைக்கோட்டை வரைக.

OC யை, ஒன்று சேர்.

இனி, $\angle ACD$ செங்கோணமாதலால், D என்பது கொடுத்த அரைக் கோள கிண்ணத்தைத் தன்பகுதியாகக் கொண்ட ஒரு வடிவ கணித கோளத்தின்மீது அமையவேண்டும்.

மேலும், $\angle AED$ ஒரு செங்கோணமாதலால், E என்ற புள்ளியும் கோளத்தின்மீது கிடத்தல் வேண்டும்.

$\angle CAE = \theta$, என்க

OC யும், AE யும் இணையாவதால்

$$\angle OCA = \angle CAE = \theta.$$

அன்றியும், $OC = OA$ என்பதால்

$$\angle OAC = \angle OCA = \theta$$

இத்துடன், $\angle GDC = 90^\circ - \angle DGC = \theta$

இனி, DAE என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$\angle DAE = 2\theta$$

எனின், $AE = DA \cos 2\theta = 2\sqrt{3} \cos 2\theta$ (i)

அன்றியும், AEG என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$AE = AG \cos \theta = 2 \cos \theta \quad \text{(ii)}$$

AE யின் இவ்விரு மதிப்புகளையும் சமன்படுத்த நாம் பெறுவது

$$2\sqrt{3} \cos 2\theta = 2 \cos \theta$$

(அ-து) $2\sqrt{3}\,(2\cos^2\theta - 1) = 2\cos\theta$

„ $2\sqrt{3}\cos^2\theta - \cos\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ (2\cos\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\cos\theta + 1) = 0$

ஆகவே, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ என்பதிலிருந்து θ விரிகோணமாகும். இது சாத்தியமில்லை.]

$\therefore\ \theta = 30^\circ$

இப்பொழுது, $AC = AD \cos\theta$

$$= 2\sqrt{3}\cos\theta = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

விளிம்புக்கு அப்பால் நீட்டிக் கொண்டிருக்கும் கோலின் நீளம்
$$= 4-3 = 1$$

அன்றியும், இலாமியின் தேற்றப்படி, R, S என்பவற்றைக் கணக்கிடலாம்.

(ii) அவ்வாறு கிடக்கும் மிகக் குறுகிய கோலின் நீளம் $2x$ ஆகுக.

இவ்வகையில், B என்ற புள்ளி Cயுடன் ஒன்றாகப் பொருந்தும்.

இனி, $AC = AD\cos\theta = 2\sqrt{3}\cos\theta$

(அ-து) $2x = 2\sqrt{3}\cos\theta$

$\therefore \quad x = \sqrt{3}\cos\theta.$

இப்பொழுது, AE யின் இரு மதிப்புகளாவன

$AE = AD\cos 2\theta = 2\sqrt{3}\cos 2\theta$

$AE = AG\cos\theta = \frac{1}{2} AC\cos\theta$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2x\cos\theta$$

$$= x\cos\theta$$

$$= \sqrt{3}\cos\theta.\cos\theta = \sqrt{3}\cos^2\theta$$

ஆகவே, $2\sqrt{3}\cos 2\theta = \sqrt{3}\cos^2\theta$

(அ-து) $3\sqrt{3}\cos^2\theta = 2\sqrt{3}$

$$\therefore \quad \cos^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

எனின், மிகக் குறுகிய கோலின் நீளம்

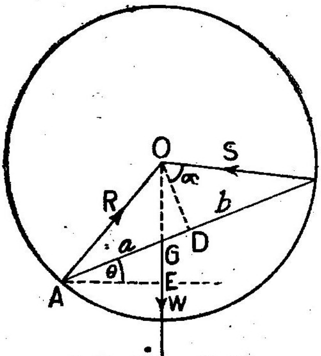
$$= 2.x = 2\sqrt{3}\cos\theta$$

$$= 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}}$$

உதாரணம் 6

தன் புவி யீர்ப்பு மையத்தால் a, b என்னும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படும் ஒரு கோல் மழமழப்பான ஒரு கோளத்திற்குள்ளே வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அது சமநிலையில் இருக்கும்போது, அடிவானத்தோடு உண்டாக்கும் சாய்வு θ ஆகவும், அது கோள மையத்தில் எதிர்கொள்ளும் கோணம் 2α ஆகவுமிருந்தால்,

$$\tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$$ எனக் காட்டுக.



படம்-66

இங்கு, அக்கோலின் முனைகளிலுள்ள R, S என்னும் இரண்டு எதிர்த் தாக்கங்களும், அக்கோள மையம் O வழியாகச் செல்கின்றன.

எனின், அக்கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G என்பது O விற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருக்கும்.

OG என்பது A வழியாக வரையப்படும் கிடைக் கோட்டை E யில் சந்திக்கட்டும்.

OD என்பதை AB க்குச் செங்குத்தாக வரை.

ஆயின், $\angle AOD = \angle BOD = \alpha$

$\angle OGD =$ குத்தெதிர்க் கோணம் AGE

$= 90° - \theta$

$\angle OBG = \angle OBD = 90° - \alpha$

இதேபோல், $\angle OAG = 90° - \alpha$

கோண கணித தேற்றத்தின்படி,

$$(a+b)\cot\angle OGB = b\cot\angle OAG - a\cot\angle OBG$$

(அ-து) $(a+b)\cot(90° - \theta) = b\cot(90° - \alpha) - a\cot(90° - \alpha)$

(அ-து) $(a+b)\tan\theta = b\tan\alpha - a\tan\alpha$

$$\therefore \tan\theta = \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$$

அன்றியும், இலாமியினது தேற்றத்தின்படி,

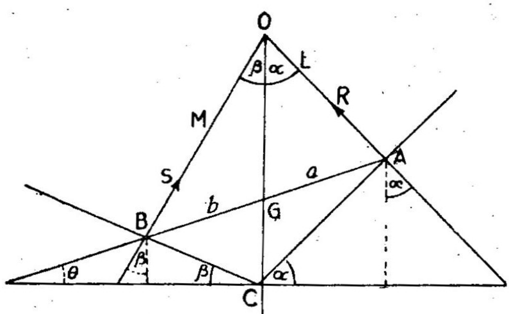
$$\frac{R}{\sin BOG} = \frac{S}{\sin AOG} = \frac{W}{\sin AOB}$$

$$\therefore \frac{R}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{S}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{W}{\sin 2\alpha}$$

$$\therefore R = \frac{W\sin(\alpha+\theta)}{\sin 2\alpha};\ S = \frac{W\sin(\alpha-\theta)}{\sin 2\alpha}$$

உதாரணம் 7

தன் புவியீர்ப்பு மையத்தால் a, b என்னும் பகுதிகளாகப் பிரிக்கப் படுகின்ற ஒரு உத்திரம், ஒன்றையொன்று ஒரு கிடைக் கோட்டில் வெட்டிக்கொண்டு, அடிவானத்திற்கு முறையே α, β என்னுங் கோணங் களிற் சாய்ந்த இரண்டு மழமழப்பான தளங்களிலே தன் முனைகள் கிடக் கச் சமநிலையில் இருக்கின்றது. அடிவானத்தோடு அவ்வுத்திரம் உண்டாக் கும் கோணத்தையும், அத்தளங்களுடைய எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.



படம். 67

அத்தளங்கள் CA, CB என்பனவாகுக. AB என்பது உத்திரம், அதன் புவியீர்ப்பு மையம் G என்க. ஆயின், AG = a; GB = b; θ என்பது அடிவானத்தோடு அந்த உத்திரம் உண்டாக்கும் கோணமாகுக.

R, S என்பன அச் சாய்தளங்களுக்குச் செங்குத்தாய், A, B என்ற புள்ளிகளிலுள்ள எதிர்த் தாக்கங்களாகுக: அவை O வில் சந்திக்கவும்,

அவ்வுத்திரத்தின்மீது மூன்று விசைகளே தாக்குகின்றமையால், G வழியே செயல்படும் அவ்வுத்திரத்தின் எடை W வும் O வழியே

செல்லவேண்டும். அதாவது, புவியீர்ப்பு மையம் G என்பது O விற்கு நிலைக்குத்தாகக் கீழே இருக்கும்.

இப்பொழுது, $\angle AOG = \alpha$, $\angle BOG = \beta$, $\angle AGO = 90° - \theta$ என, எளிதிற் காணலாம்.

கோண கணிதத் தேற்றத்தின்படி

$$(a+b)\cot(90-\theta) = b\cot\beta - a\cot\alpha$$

(அ-து) $(a+b)\tan\theta = b\cot\beta - a\cot\alpha$

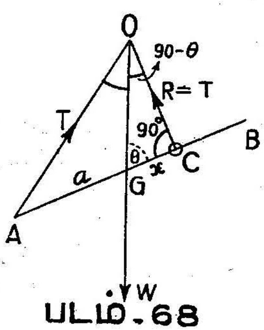
இதிலிருந்து θ வைக் கணக்கிடலாம். அன்றியும், இலாமியின் தேற்றத்தின்படி

$$\frac{R}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{\sin(\alpha+\beta)}$$

உதாரணம் 8

2 l நீளமுள்ள ஓர் இழையின் ஒரு நுனி, 2 a நீளமுள்ள, ஒரு பாரமான, மழமழப்பான சீர்க்கோலொன்றின், ஒரு முனைக்குக் கட்டப்பட்டதுடன், அதன் மற்றை நுனி அந்தக் கோலில் வழுக்கக்கூடிய ஒரு எடையில்லாத ஒரு வளையத்திற்குக் கட்டப்பட்டிருக்கிறது. அந்தக் கோல், அவ்விழையின் உதவியால், ஒரு மழமழப்பான ஒரு முளைக்கட்டையிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. சமநிலையில், அக்கோலானது நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் உண்டாக்கினால்

$$l\cos\theta = a\sin^3\theta \text{ எனக் காட்டுக.}$$



படம்-68

AB என்பது கோலையும், C என்பது எடையில்லாத வளையத்தையும், O என்பது முளைக்கட்டையையும் குறிக்கட்டும்.

அக்கோல் பின்வரும் விசைகளின் தாக்கத்துக்குட்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றது.

(i) அக்கோலின் மையப் புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும். அதன் எடை W.

(ii) AO வில் உள்ள இழுவிசை T.

(iii) கோலுக்குச் செங்குத்தாக C என்னும் புள்ளியில் செயல் படும் வளையத்தின் எதிர்த் தாக்கம் R.

(குறிப்பு :—கோலுடன் பொருந்தியிருக்கும் வளையத்தின் புள்ளிக்கும், கோலுக்கும் பொதுச் செங்குத்து, அக்கோலுக்கு அப்புள்ளியில் வரையும் செங்குத்தாகும்)

இனி, வளையமானது இமு விசைகளுக்குட்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றது.

(i) இழையில் உள்ள இழுவிசை T

(ii) கோலினது எதிர்த் தாக்கம் R

ஆகவே, $R = T$ ஆகும். மேலும், CO வில் உள்ள இழுவிசை ABக்குச் செங்குத்தாகச் செயல் படும்.

எனின், W ஆனது இரு சமவிசைகளைச் சமநிலையடையச் செய்கின்றமையால், OG நிலைக்குத்தாக அமைந்து, அது அவற்றிடையே கிடக்கும் கோணத்தை இருசமக் கூறிடும்.

இப்பொழுது, $\angle OGC = \theta$ என்பதாலும்,

$\angle C = 90^\circ$ ஆதலாலும், $\angle GOC = 90^\circ - \theta$

ஆகவே, $\angle AOC = 90^\circ - \theta$

$GC = x$ எனக் கொள்க,

இப்பொழுது, முக்கோணம் AOG யிலிருந்து, நாம்பெறுவது

$$\frac{AG}{\sin AOG} = \frac{AO}{\sin AGO}$$

(அ-து) $$\frac{AG}{\sin (90-\theta)} = \frac{AO}{\sin (180-\theta)}$$

(அ-து) $$\frac{a}{\cos \theta} = \frac{AO}{\sin \theta}$$

$$\therefore a \sin \theta = AO \cos \theta$$

இதேபோல், முக்கோணம் GOC யிலிருந்து,

$x \sin \theta = CO \cos \theta$ எனப் பெறக் கூடும்.

எனின், $(a+x)\sin\theta=(AO+CO)\cos\theta=2\,l\cos\theta$ (i)

மேலும், கோண கணிதத் தேற்றத்திலிருந்து, நாம் பெறுவது

$(a+x)\cot\theta=(a-x)\cot(90^\circ-\theta)$

$=(a-x)\tan\theta$ (ii)

$\therefore\ x(\cot\theta+\tan\theta)=a(\tan\theta-\cot\theta)$

$\therefore\ x=a(\sin^2\theta-\cos^2\theta)$

$\therefore\ a+x=2a\sin^2\theta$

$\therefore\ (a+x)\sin\theta=2a\sin^3\theta$

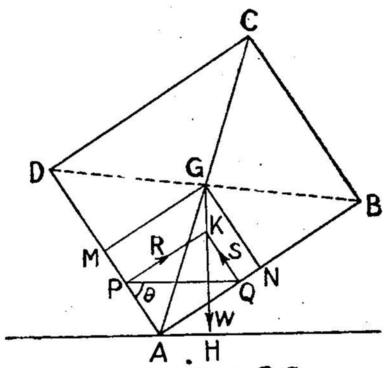
(i) இல் இருந்து $(a+x)\sin\theta=2\,l\cos\theta$

$\therefore\ l\cos\theta=a\sin^3\theta$

உதாரணம் 9

ஒரே கிடைக் கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று C என்னும் தூரத்தில் இருக்கின்ற இரண்டு மழமழப்பான முளைக் கட்டைகளுக்கிடையே, 2a பக்கமுடைய ஒரு சதுரம், தனது தளம், நிலைக்குத்திலிருக்கும்படி சம நிலையில் வைக்கப்படுகின்றது. அடிவானத்திற்கு அதனுடைய விளிம்புகளுள் ஒன்றின் சாய்வு 45° அல்லது $\frac{1}{2}\ \sin^{-1}\frac{a^2-c^2}{c^2}$ எனக்காட்டுக.

ABCD என்பது சதுரமாகுக; P, Q என்பன முளைக்கட்டைகள்; AD என்ற பக்கம் அடிவானத்துடன் θ கோணம் சாய்ந்திருக்கட்டும். (அ-து) $\angle APQ=\theta$



படம் - 69

அச் சதுரத்தின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன ;

(i) அதனுடைய எடை W என்பது G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும்;

(ii) AD க்குச் செங்குத்தாக P வழியே செயல்படும் R என்னும் எதிர்த் தாக்கம்;

(iii) AB க்குச் செங்குத்தாக Q வழியே செயல்படும் S என்னும் எதிர்த் தாக்கம்;

ஆகவே, இம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கவேண்டும்.

R, S என்பன K யில் சந்தித்தால், எடை W K வழியே செல்ல வேண்டும்.

எனின், GK நிலைக்குத்தாகும்.

இப்பொழுது, AB, AD என்பவற்றை ஆயங்களாகக் கொள்வோம்.

$AQ = PQ \sin\theta = c \sin\theta$

$AP = PQ \cos\theta = c \cos\theta$

PQ வின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{c \sin\theta} + \frac{y}{c \cos\theta} = 1$$ என்பதாகும்.

$\therefore$ PQ வின் சரிவு $= -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

K யின் ஆயத்தொலைகள் AQ, QK (அ-து) $c \sin\theta$, $c \cos\theta$

Gயின் ஆயத் தொலைகள் (a, a) ஆகும்.

$\therefore$ GK யின் சரிவு$= \dfrac{a-c\cos\theta}{a-c\sin\theta}$

GK நிலைக்குத்தாயும், PQ கிடையாயும் இருப்பதால்,

$GK \perp PG$

$$\therefore \frac{a-c\cos\theta}{a-c\sin\theta} \times -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -1$$

$\therefore \cos\theta\,(a-c\cos\theta) = (a-c\sin\theta)\sin\theta$

$a\cos\theta - c\cos^2\theta = a\sin\theta - c\sin^2\theta$

$\therefore a(\cos\theta - \sin\theta) = c(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$\therefore \cos\theta - \sin\theta = 0$ (i)

அல்லது $a = c(\cos\theta + \sin\theta)$ (ii)

(i) லிருந்து $\theta = 45^\circ$ எனப் பெறுவோம்

(ii) லிருந்து $a^2 = c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta)$

(அ-து) $a^2 = c^2(1 + \sin 2\theta)$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

$$\therefore \theta = \tfrac{1}{2}\sin^{-1}\frac{a^2 - c^2}{c^2}$$

வேறு வழி

விசைகளைக் கிடையாகப் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$R \sin \theta = S \cos \theta \quad (i)$$

அன்றியும், G பற்றிய விசைகளின் திருப்புத் திறன்களை எடுத்தால், $R \times MP = S \times QN$

$$R\ (a - c \cos \theta) = S\ (a - c \sin \theta) \quad (ii)$$

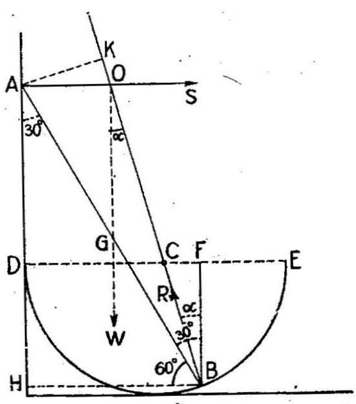
$\frac{(i)}{(ii)}$ எடுக்க, நாம் பெறுவது $\dfrac{\sin \theta}{a - c \cos \theta} = \dfrac{\cos \theta}{(a - c \sin \theta)}$

$$\therefore \cos \theta\ (a - c \cos \theta) = \sin \theta\ (a - c \sin \theta)$$

இதிலிருந்து நமக்கு வேண்டிய விடைகள் கிட்டும்.

உதாரணம் 10

a என்னும் விட்டமுடைய ஒரு மழமழப்பான அரைக் கோள கிண்ணமானது, தன் விளிம்பு மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடுமாறு வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. பாரமான சீர்க்கோலொன்றின் ஒரு முனை அக்கிண்ணத்தின் உள் பரப்பின்மீதும், மற்றை முனை அச்சுவருக் கெதிராயும் இருக்குமாறு, அடிவானத்திற்கு 60° யில் சாய்ந்ததாய், சம நிலையில் இருக்கின்றது. அக்கோலினது நீளம் $a + \dfrac{a}{\sqrt{13}}$ ஆக இருத்தல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.



படம் - 70

படத்தில் AB என்பது கோலையும், C என்பது கிண்ணத்தின் மையத்தையும், DE அதன் விட்டத்தையும் குறிக்கட்டும்.

கோலானது, கீழ்க்கண்ட விசைகளின் தாக்கத்துக்குட்பட்டுச் சம நிலையில் இருக்கின்றது.

(i) அக்கோலின் மையப் புள்ளி G வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும் அதன் எடை W;

(ii) B யில், BC யின் வழியே செயல்படும் கிண்ணத்தின் எதிர்த் தாக்கம் R;

(iii) சுவருக்குச் செங்குத்தாக A இல் செயல்படும் சுவரின் எதிர்த் தாக்கம் S;

சமநிலைக்கு இம்மூன்று விசைகளும் ஒருபுள்ளியில் சந்திக்கவேண்டும்

B யிலிருந்து DC க்குச் செங்குத்தாக BF என்பதை வரைக.

$\angle GOC = \alpha$ என்க.

எனின், $\angle CBF = \alpha$.

மேலும், $\angle ABH = 60^\circ$ என்பதால், $\angle HAB = 30^\circ$ ஆகும்

எனின், $\angle ABF = 30^\circ$.

அன்றியும், $\angle ABO = 30^\circ - \alpha$.

விசைகளைச் செங்குத்தாகப் பிரிப்பின்,

நாம் பெறுவது

$$R \cos \alpha = W \quad \text{(i)}$$

A பற்றிய விசைகளின் திருப்புத்திறன்களை எடுக்க,

நாம் பெறுவது

$$W.\ AO = R.\ AK$$

(அ-து) $W.\ AG \sin 30^\circ = R.\ AB \sin (30^\circ - \alpha)$

(அ-து) $W.\ \frac{1}{2} AB.\ \frac{1}{2} = R.\ AB \sin (30^\circ - \alpha)$

$W = 4 R \sin (30^\circ - \alpha) \quad \text{(ii)}$

(i), (ii) இவைகளிலிருந்து, நாம் பெறுவது

$R. \cos \alpha = 4R \sin (30^\circ - \alpha)$

(அ-து) $\cos \alpha = 4 \sin (30^\circ - \alpha)$

(அ-து) $\cos \alpha = 4 (\sin 30^\circ \cos \alpha - \cos 30^\circ \sin \alpha)$

$\therefore \cos \alpha = 2 \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin \alpha$

$-\cos \alpha = -2\sqrt{3} \sin \alpha$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

இப்பொழுது,

$$AB \cos 60^\circ = BH$$
$$= DF$$
$$= DC + CF$$
$$= DC + BC \sin \alpha$$
$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}$$

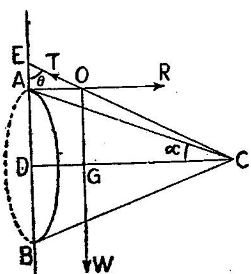
(அ-து) $\frac{AB}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}$

$$\therefore AB = a + \frac{a}{\sqrt{13}}$$

உதாரணம் 11

ஒரு திண்மக் கூம்பின் உயரம் h; அதன் அரை உச்சிக்கோணம் α. அதன் அடிப்பாகம் மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரில் பொருந்துமாறு வைக்கப்பட்டு, அதனுச்சிக்கும் அச்சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்குந் தொடுக்கப்பட்ட ஓரிழையினுலே அது தாக்கப்படுகிறது.

அவ்விழையின் மிகப்பெரிய சாத்தியமான நீளம் $h\sqrt{1 + \frac{16}{9}\tan^2\alpha}$ எனக் காட்டுக.



படம் - 71

ABC என்பது கூம்பையும், G என்பது அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தையும், C அதன் உச்சியையும், D என்பது கூம்பின் அடிப்பாகத்தின் மையப் புள்ளியையும், E என்பது இழை, சுவருக்குக் கட்டப்பட்ட புள்ளியையும் குறிக்கட்டும். சமநிலைக்கு, கூம்பின் எடையாகிய Wவின் தாக்கக் கோடும், சுவரின் செங்குத்து எதிர்த் தாக்கங்களின் விளைவாகிய Rஇன் தாக்கக் கோடும், இழையின் இழுவிசையும் ஒரே புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும். இப்புள்ளி O ஆகுக.

R கிடையாக இருப்பதாலும், கூம்பின் அடிப்பாகம் AB யின் மேல் விளிம்பாகிய A யைவிட அது அதிக உயரத்தில் செயல்படக் கூடாமையாலும், அக்கூம்பு Aயைப் பற்றிப் புரட்டும் நிலையில் இருக்கும்

பொழுதே, இழையின் மிகப் பெரிய சாத்தியமான நீளம் இருக்குமென்று பெறப்படுகிறது.

இப்பொழுது $DG = \frac{h}{4} = AO$; $DA = h \tan \alpha$

EAO, EDC என்பன வடிவொத்த முக்கோணங்களாதலால், $EA = \frac{1}{4} ED$

ஆகவே, $EA = x$ எனில்,

$x = \frac{1}{4} ED = \frac{1}{4}(EA + AD) = \frac{1}{4}(x + h \tan \alpha)$

$\therefore x = \frac{h}{3} \tan \alpha$

எனின், $ED = \frac{4}{3} h \tan \alpha$

இப்பொழுது, $CE^2 = CD^2 + ED^2$

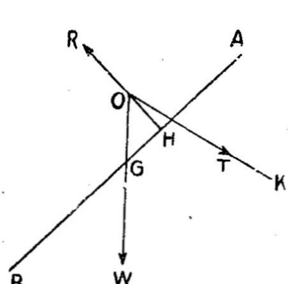
$= h^2 + \frac{16}{9} h^2 \tan^2 \alpha$

$= h^2 \left(1 + \frac{16}{9} \tan^2 \alpha \right)$

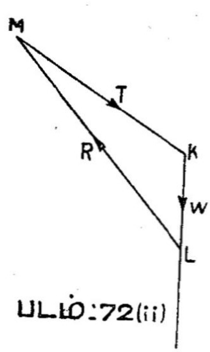
$\therefore CE = h \sqrt{1 + \frac{16}{9} \tan^2 \alpha}$

உதாரணம் 12

ஒரு பட்டம் (kite) அதன்மீது தாக்கும் விசைகள் காரணமாக எவ்வாறு சமநிலையில் இருக்கின்றதென்று காட்டி, அப்பொழுது பட்டத்திற்குச் செங்குத்து, பட்டத்தின் இழையினது திசைக்கும், நிலைக்குத்திற்கும் இடையே கிடக்கவேண்டுமென நிறுவு.



படம் - 72 (i)



படம் : 72 (ii)

AB என்பது அப்பட்டத்தின் நடுக்கோடாகுக. B என்பது வால் இணைத்துள்ள புள்ளியாகுக. பட்டத்தினது தளம் இத்தாளினது தளமாகுக. G என்பது வாலுட்பட பட்டத்தினது புவியீர்ப்பு மையமாகுக.

அப்பட்டத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலுமுள்ள காற்றினது தாக்கம் இரு கூறுகளாகப் பிரிக்குமிடத்து ஒன்றை அப்பட்டத்துக்குச் செங்குத்தாயும், மற்றையதை அதன் மேற்பரப்பினது நீளவாட்டிலும் பிரிக்கலாம். பின்னவையாகிய கூறுகள் அதன்மீது ஒரு வினைவையுந் தராவாகையால் அவைகளைப் புறக்கணித்து விடலாம். முன்னவையாகிய கூறுகள் Gயிற்கு மேலே ஒரு சிறு தூரத்திலுள்ள H என்னும் புள்ளியில் அப்பட்டத்திற்குச் செங்குத்தாய்த் தாக்குகின்ற R என்னும் ஒரு தனி விசையாகக் கூட்டப்படும்.

R, W என்பன O என்னும் ஒரு புள்ளியிற் சந்திக்கின்றன, அப்புள்ளியின் வழியாகவே, மூன்றும் விசை, அதாவது, அவ்விழையின் இழுவிசை செல்ல வேண்டும்.

இப்பொழுது, KL என்பதைப் பட்டத்தின் எடை W என்பதைக் குறிக்கும்படி நிலைக்குத்தாக வரைக, LM என்பதை HO விற்கு இணையாய் R என்பதைக் குறிக்கும்படி வரைக.

ஆயின், விசை முக்கோணத்தின்படி, MK என்பது அவ்விழையின் இழுவிசை T என்பதைக் குறிக்க வேண்டும் என்பது தெளிவு.

படத்திலிருந்து MK என்னும் கோடு நிலைக் குத்துக்கோடு LKஉடன் LM என்னுங்கோடு உண்டாக்குவதைவிட பெரியகோணம் உண்டாக்க வேண்டுமெனத் தெரிய வருகிறது.

(அ-து) பட்டத்திற்குச் செங்குத்தானது நிலைக்குத்திற்கும், இழையின் திசைக்கும்/இடையே கிடத்தல் வேண்டும்.

மேலும், விசை முக்கோணத்திலிருந்து, T, W என்னும் விசைகளின் அளவு, காற்றின் தாக்கத்தினால் ஏற்படும் R ஐ விடச் சிறியதாக இருக்க வேண்டுமென்பது தெளிவாகிறது.

பயிற்சி 7

1. W எடையுள்ள ஒரு பாரமான ஒரு சீர்க்கோலின், ஒரு முனை மழுமழுப்பான ஒரு கிடைத்தளத்தின்மீது இருக்கிறது. அக்கோலின் மற்றை முனையிற் கட்டப்பட்ட ஓரிழை அத்தளத்திற்கு மேலே நிலையான ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்படுகின்றது.

அவ்விழையின் இழுவிசையைக் காண்க.

2. W எடையுள்ள AB என்னும் ஒரு சீர்க்கோலொன்று A இல் உள்ள ஒரு பிணையல் பற்றி ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இயக்கப்படக் கூடியது. A இற்கு நிலைக்குத்தாய் மேலே உள்ள மழுமழுப்பான முளைக் கட்டை C யின் மேலாகச் செல்கின்ற BCP என்னும் ஓரிழைக்குத் தொடுத்துள்ள P என்னும் எடையால் அது, சமநிலையில் நிறுத்தப்படு கின்றது, AC=AB ஆயின், P=W cos ACB எனக் காட்டுக.

3. ஒரு கோளத்தின் ஆரம் 'a'. அதன் எடை W. அது, l நீள முள்ள ஒரு இழையினால், மழுமழுப்பான நிலைக்குத்துச் சுவரில் உள்ள O என்னும் புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. அது சமநிலையில் இருக்கும்பொழுது, நிலைக்குத்திற்கு இழையின் சாய்வையும், அந்த இழையின் இழுவிசையையும் காண்க.

4. 4 இரு. எடையுள்ள AB என்னும் கோலொன்று ஒரு பிணை யலால் Aஇல் ஒரு சுவருக்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது, அது, கோலு டன் 30° உண்டாக்கும் BC என்னும் இழையினால், சுவருக்கு 60° கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கும் வண்ணம் தாங்கப்படுகிறது. B என் னும் முனை A இற்குக் கீழே இருந்தால், பிணையலிலுள்ள எதிர்த் தாக்கத் தையும், இழையில் உள்ள இழுவிசையையும் கண்டுபிடி.

5, W எடையும், 2 a நீளமும் கொண்ட AB என்னும் சீர்க்கோ லொன்று Aஇல் ஒரு பிணையலால் ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு இணைக்கப் பட்டிருக்கிறது. Bயில் பிரயோகிக்கப்படும் F என்னும் ஒரு கிடைவிசை யினாலே அது, நிலைக்குத்திற்கு a என்னும் கோணத்தில், சாய்ந்த ஒரு நிலை யில் ஓய்வில் வைக்கப்படுகின்றது. பிணையலில் உள்ள எதிர்த் தாக்கத் தின் அளவையும், திசையையும் காண்க. Fஇன் அளவு $\frac{1}{2}$ W tan a எனக் காட்டு.

6. ஒரு சீர்க்கோலொன்று அதன் முனைகளுள் ஒன்று பற்றிக் கட்டின்றித் திரும்பக்கூடியது. அது, தன் எடையின் அரைப் பங்குக்குச் சமனான ஒரு கிடை விசையினாலே தன் மற்றை முனையிலே தாக்கப்பட்டு, நிலைக்குத்தினின்று ஒரு பக்கத்திற்கு இழுக்கப்படுகின்றது. நிலைக்குத் திற்கு எச்சாய்வில் அக்கோல் ஓய்விலிருக்கும் என்று காண்க,

7. ஒரு பாரமான சீர்க்கோலின் எடை W ஆகும். அதன் ஒரு முனை, ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரில் உள்ள புள்ளி ஒன்றுக்கு ஒரு பிணைய லால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. சுவரில், பிணையலுக்கு நேர்க்குத்தாய், மேலே உள்ள ஒரு புள்ளிக்கு அதன் மற்றை முனையை இணைக்கும்

ஓரிழையினுலே அது தாங்கப்படுகிறது. அக்கோலானது மேல்நோக்கிய நிலைக்குத்துடன் α என்னும் கோணமும், இழையுடன் β கோணமும் உண்டாக்கினுல், அந்த இழையின் இழுவிசையைக் காண்க.

8. ஒரு சீர்க்கோலொன்றினுடைய மழமழப்பான ஒருமுனையானது தரையும் நிலைக்குத்துச் சுவரும் சந்திக்கும் சந்திப்புக்கெதிராய் இருக்கும் வண்ணம், அது, தனது மற்றை முனைக்கும், அச்சுவரிலுள்ள இருப்பு வளையம் ஒன்றிற்கும், இணைக்கப்பட்ட ஓரிழையினுலே தாங்கப்படுகின்றது. இழையின் நீளம், தரைக்கு மேலே உள்ள அவ்வளையத்தின் உயரத்திற்குச் சமனுயின், அவ்விழுவிசை அக்கோலினது எடையின் அரைப் பங்காகு மெனக் காட்டுக.

9. 2 இரு. எடையுடைய BC என்னும் ஒரு சீர்க்கோலொன்று B பற்றிக் கட்டின்றித் திரும்பக் கூடியது. அது, B இருக்கும் அதே கிடைக் கோட்டிலுள்ள A என்னும் ஒரு புள்ளிக்கு, 8 அங்குல நீளமான ஓரிழை AC யினுலே இணைக்கப்பட்டு, அவ்விழையினுலே தாங்கப்படுகின்றது. AB யின் தூரம் 10 அங்குலமும், அக்கோலின் நீளம் 6 அங்குலமுமாயின், அவ்விழையின் இழுவிசையைக் காண்க.

10. AB என்ற ஒரு சீரான கோலின் நீளம் 6 அடி; எடை 40 இரு. ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு இணைக்கப்பட்ட அதன்முனை A பற்றி அது கட்டின்றித் திரும்பக்கூடியது. அக்கோலில் A யிலிருந்து $1\frac{1}{4}$ அடி தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கும், சுவரில் A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே உள்ள புள்ளிக்கும், இணைக்கப்பட்ட கயிற்றினுல் அது, கிடைநிலையில் தாங்கப்படுகிறது. கயிற்றின் இழுவிசை 120 இரு. எடைக்கு மேற்படக் கூடாதெனில். A இற்கு மேலே சுவரில் இழை இணைக்கப்படும் புள்ளியின் உயரம் $1\frac{2''}{3}$ க்குக் குறைவாக இருக்க முடியாதெனக் காட்டுக.

11. AB என்னும் ஒரு சீர்கோலொன்று, அதன் A என்னும் முனை ஒரு மழமழப்பான சுவருக்கெதிரே இருக்க, நிலைக்குத்திற்கு 60° கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமாறு, B யிலிருந்து 1 அடி தூரத்திலுள்ள C என்னும் புள்ளிக்கும், A இற்கு நிலைக்குத்தாக மேலே சுவரிலுள்ள ஒரு வளையத்திற்கும், தொடுத்த ஓரிழையினுலே தாங்கப்படுகிறது. அக்கோலினது நீளம் 4 அடி ஆயின், அவ்வளையத்தினது நிலையையும், அவ்விழையினுடைய சாய்வையும், இழுவிசையையுங் காண்க.

12. ABC என்பது W எடையுள்ள ஒரு சீரான கோல். B மேலாக இருக்கும்படியும், A என்னும் முனை AD என்னும் மழமழப்பான ஒரு

நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிராக இருக்கும்படியும், CD என்னும் ஓரிழை யினாலே அது, தாங்கப்படுகின்றது. BD என்பது கிடையாயும், CD என்பது சுவருக்கு 30° கோண சாய்வுடையதாயும் இருந்தால், அவ் விழையின் இழுவிசையையும், அச்சுவரின் எதிர்த் தாக்கத்தையும் காண்க. $AC=\frac{1}{3}AB$ என்றும் நிறுவுக.

13. a நீளமான சீர்க்கோலொன்று மழமழப்பான சுவருக்கெதிரே தொங்கும் வண்ணம், l நீளமுள்ள ஓரிழையினாலே தாங்கப்படுகின்றது. அவ்விழை அக்கோலின் ஒரு முனைக்குக் கட்டப்பட்டு, அதன் மற்றை முனை அச்சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளது. அக் கோல், θ என்னுங் கோணத்தில் அச்சுவருக்குச் சாய்ந்த நிலையில் ஓய்வில் இருந்தால், $\cos^2\theta=\dfrac{l^2-a^2}{3a^2}$ எனக் காட்டுக.

சமநிலை சாத்தியமாக a : l என்னும் விகிதத்தினுடைய எல்லை களைக் காண்க.

மேலும், அவ்விழையின் இழுவிசை அக்கோலினது எடையிலும் பெரிதெனக் காட்டுக.

14. ஒரு சீரல்லாத கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G ஆகும். அது, தன் கீழ்முனை A அடிவானத்திற்கு α என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள ஒரு மழமழப்பான சாய்தளத்தின்மீதும், தன் மேல்முனை B ஒரு மழமழப் பான சுவரின்மீது படிந்திருக்கும்படியும் வைக்கப்படுகிறது. அக்கோல் அடிவானத்திற்கு β சாய்வுள்ளதாய் இருந்தால் $\dfrac{AG}{GB}=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$ எனக் காட்டுக.

15. $2a$ என்னும் நீளமுடைய ஒரு சீரான உத்திரமொன்று தனது, ஒரு முனை ஒரு மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராய் படிந்திருக்கவும், அச்சுவருக்கு இணையாய் அதிலிருந்து l தூரத்திலுள்ள ஒரு மழமழப்பான கிடைக் கோலின்மீது தன் நீளத்தின் ஒரு புள்ளி பொருந்தியும் சமநிலையில் இருக்கின்றது. நிலைக்குத்திற்கு அவ்வளையின் சாய்வு $\sin^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/3}$ எனக் காட்டுக.

16. a, b என்னும் நீளங்களையுடைய இரு பகுதிகளாகத் தன் புவியீர்ப்பு மையத்தால் பிரிக்கப்படுகின்ற ஒரு கோலிற்கு அதன் முனைகளிற் கட்டப்பட்ட l நீளமுடைய ஓரிழையுண்டு. அவ்விழை

மழமழப்பான ஒரு சிறு முளைக்கட்டையின் மேலே தொங்கவிடப்படுகிறது. அக்கோலானது நிலைக்குத்தல்லாத நிலையிற் சமநிலையை அடைந்தால், அந்நிலையைக் காண்க.

17. பாரமான ஒரு சீர்க்கோலொன்று ஒரு நிலைப்புள்ளியிலிருந்து, தன் முனைகளிலே தொடுத்துள்ள இரண்டு இழைகளாலே தொங்கவிடப்படுகிறது. இவ்விழைகளுடைய நீளங்களும், கோலின் நீளமும் 2 : 3 ; 4 போல ஆயின், அவ்விழைகளுடைய இழுவிசைகளும் கோலின் எடையும் $2 : 3 : \sqrt{10}$ போலிருக்குமெனக் காட்டுக.

18. 15 செ. மீ. நீளமும், 10 கிலோ கிராம் எடையுமுள்ள ஒரு சீர்க் கோலானது தன்னுடைய முனைகளுக்குத் தொடுத்த இழைகளினாலே ஒரு நிலைப்புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. அவ்விழைகளின் நீளம் 9 செ. மீ. 12 செ மீ. என்பன. θ என்பது நிலைக்குத்திற்கு அக் கோல் சாய்ந்துள்ள கோணமாயின், $25 \sin \theta = 24$ எனக் காட்டுக. அவ்விழைகளின் இழுவிசைகளையும் கணக்கிடுக.

19. நேரான சீர்க்கோலொன்று 3 கிலோ கிராம் எடைகொண்டது. அது, இரண்டு இழைகளினால் ஒரு முளைக்கட்டையினின்று தொங்க விடப்படுகின்றது அவ்விழைகளினுடைய ஒரு பக்க முனைகள் முளைக் கட்டையிலும், மற்றைய பக்க முனைகள் அக்கோலினுடைய முனை களிலுங் கட்டப்பட்டுள்ளன. அவ்விழைகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் செங்கோணம். இதில், ஓரிழை மற்றையதைப் போல் இரு மடங்கு நீளமாயின், அவற்றினுடைய இழு விசைகளைக் காண்க

20. AB என்பது W எடையுள்ள ஒரு பாரமான உத்திரம். அதன் புவியீர்ப்பு மையம் A யிலிருந்து a தசம. மீ B யிலிருந்து b தசம. மீ தூரத்திலும் உள்ளது. P, P என்னும் சம எடைகள் C என்னும் மழமழப்பான ஒரு முளைக்கட்டைக்கு மேலாகச் செல்லும் ACP, BCP என்னும் இரண்டு இழைகளுக்கு இணைக்கப்படுகின்றன,

AB என்பது அடிவானத்திற்கு $\tan^{-1}\left[\frac{a-b}{a+b}\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$

என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்துள்ளதெனக் காட்டுக.

21. W எடையுள்ள ஒரு சீர்க்கோலொன்று ஒரு முனைக்கு ஒன்றாக தொடுக்கப்பட்ட இரு நுண்ணிழைகளாலே தாங்கப்படுகின்றது. அவ்விழைகள் மழமழப்பான நிலைகொண்ட சிறு கப்பிளுக்கு மேலாகச் சென்று மற்றை முனைகளிலே முறையே ω_1, ω_2 என்னும் எடைகளைக் கொண்டுள்ளன, அக்கோல் அடிவானத்திற்கு

$\sin^{-1} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{W\sqrt{2(\omega_1^2 + \omega_2^2) - W^2}}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்குமெனக் காட்டுக.

22. W என்னும் எடையுடைய ஒரு சீர்க்கோலொன்று தன்னுடைய முனைகளிலே தொடுக்கப்பட்ட $2l$ நீள இழையொன்றால் மழமழப்பான முளைக்கட்டையிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டுச் சமநிலையிலே தாங்கப்படுகிறது. இனி, W′ என்னும் ஒரு எடை அக்கோலின் ஒரு முனைக்கு இணைக்கப்பட்டால், அக்கோல் சமநிலையடைய அவ்விழையின் $\frac{l\,w'}{W+w'}$ என்னும் ஒரு நீளம், அம்முளைக்கட்டைக்கு மேலாகச் சரிய வேண்டுமெனக் காட்டுக.

23. ஒரு கோலானது அதன் ஒரு முனையிலுள்ள ஒரு பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்திலே இயக்கப்படத்தக்கது. அதன் மற்றை முனையில், அக்கோலின் எடையின் அரைப் பங்குக்குச் சமனான ஒருஎடை இணைக்கப்பட்டுள்ளது. இம்முனை அப்பிணையலுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே C என்னும் உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு, l நீளமுள்ள ஓரிழையினாலே தொடுக்கப்படுகிறது. அக்கோலினது எடை W எனின், அவ்விழையின் இழுவிசை $\frac{l\,W}{c}$ எனக் காட்டுக.

24. ஒரு சித்திரப்படம் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரின்மீது அச்சுவருக்குக் கொடுக்கப்பட்ட சாய்வு α வில் ஓய்விலிருக்கும்படி, அப்படத்தின் மிகத் தாழ்ந்த விளிம்பிற்கு மேலே தந்த வோருயரம் h இல், அச்சுவரிலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்ட ஒரு நாணலே தாங்கப்பட வேண்டியிருக்கின்றது. அப்படத்தின் பின்புறத்தில் அந்நாண் இணைக்கப்படவேண்டிய புள்ளியை ஒரு வடிவகணித வமைப்பாலே காண்க; அன்றியும், வேண்டிய நாணினது நீளத்தையுங் காண்க.

25. பாரமான இரு சமகோளங்கள் 2·5 செ. மீ ஆரையையுடையயன. அவை 7.5 செ. மீ ஆரையையுடைய மழமழப்பான கோளகிண்ணத்திற்குள்ளே சமநிலையில் இருக்கின்றன. அக்கிண்ணத்திற்கும், ஒரு கோளத்திற்கும் இடையேயுள்ள தாக்கம், அவ்விரு கோளங்களுக்கும் இடையேயுள்ள தாக்கத்தின் இரு மடங்கெனக் காட்டுக.

26. பாரமான ஒரு சீர்உத்திரம் ஒரு கிடைக் கோட்டிற் சந்திக்கும் இரண்டு மழமழப்பான சாய்தளங்களின்மீது தன்னுடைய முனைகள்

கிடக்க ஓய்வில் இருக்கின்றது. அடிவானத்திற்கு அத்தளங்களுடைய சாய்வுகள் α, β என்பன. சமநிலையில் இருக்கும்போது அடிவானத்தோடு அவ்வுத்திரம் உண்டாக்கும் சாய்வையும். அத்தளங்களுடைய எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

27. 2a நீளமான ஒரு பாரமான ஒரு சீர்க்கோல் r ஆரையுடைய ஒரு மழப்பான அரைக்கோள நிலைக் கிண்ணத்திற்கு உள்ளாக ஒரு பகுதியும், வெளியாக ஒரு பகுதியுமாகக் கிடக்கின்றது அக்கிண்ணத்தின் விளிம்பு கிடையாய் இருக்க, அக்கோலின் ஒரு புள்ளி அவ்விளிம்பைத்தொடுகின்றது. θ என்பது அக்கோல் அடிவானத்தோடு உண்டாக்கும் கோணமாயின்,

$2r\cos 2\theta = a\cos\theta$ எனக் காண்பி.

அன்றியும், இவ்வண்ணம் ஒரு நிலையான, மழமழப்பான அரைக் கோள கிண்ணத்தில், அதன் உள்ளாக ஒரு பகுதியும், வெளியாக ஒரு பகுதியுமாகக் கிடக்கக்கூடிய ஒரு சீர்க்கோலொன்று அடிவானத்துடன் கொள்ளும் மிகப் பெரிய சாய்வு $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$ எனக் காட்டுக.

28. r ஆரையுடைய ஒரு மழமழப்பான அரைக்கோள கிண்ணமொன்று அதன், விளிம்பு கிடையாய் இருக்குமாறு வைக்கப்படுகிறது. ஒரு சீரானகோலொன்று, அதன் ஒரு முனை கோளத்தின் உட்புறப் பரப்பில் இருக்க, கிண்ணத்தின் விளிம்பின்மேல் படிந்து ஓய்வில் இருக்கிறது. கிண்ணத்தின் உள்ளே இருக்கும் கோலின் பகுதியின் நீளம் c எனின், அக்கோலின் முழு நீளம் $\frac{4}{c}\left(c^2 - 2r^2\right)$ எனக் காண்பி.

இவ்வண்ணம், கிடக்கக் கூடிய கோலின் மிகக் குறுகிய நீளம் $\frac{2}{3}\sqrt{6}\,r$ எனக் காட்டுக.

29. ஒரு கிண்ணம் a ஆரையையுடைய ஒரு உள்ளீட்டற்ற கோளத்திலிருந்து ஆக்கப்படுகின்றது. அதன் விளிம்பிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் வரையும் அக்கோளத்தின் ஆரை, நிலைக்குத்தோடு α என்னும் கோணத்தை உண்டாக்க, அக்கிண்ணத்தின் A என்னும் ஒரு புள்ளிக்கு வரைந்த ஆரை நிலைக்குத்தோடு β என்னும் கோணத்தை ஆக்கும்படி அக்கிண்ணம் வைக்கப்படுகின்றது. மழமழப்பான ஒரு சீர்க்

கோலொன்று Aயில் ஒரு முனையும், அதன் நீளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி கிண்ணத்தின் விளிப்பைத் தொட்டுக்கொண்டும், ஓய்விலிருந்தால், அக் கோலினது நீளம் $4a \sin \beta \sec \frac{a-\beta}{2}$ எனக் காட்டுக.

30. 40 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு கோல், ஒரு மழமழப்பான கோளத்திற்குள்ளே வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அது கோள மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிர்கொள்வதாயும், தன் புவியீர்ப்பு மையம் அதனை 1 : 2 என்னும் விகிதத்தில் பிரிப்பதாயும் இருந்தால், அடிவானத்திற்கு அக்கோலின் சாய்வையும், அக்கோலிற்கும்,கோளத்திற்கும் இடையேயுள்ள எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க

31. மழமழப்பான ஒரு அரைக் கோள கிண்ணத்திற்குள்ளே, அக்கிண்ணத்தின் ஆரைக்குச் சம நீளமுள்ள ஒரு பாரமான கோல் வைக்கப்படுகிறது. அக்கோலின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அக்கோலின் அதன் முனையொன்றிலிருந்து அதன் நீளத்தின் மூன்றிலொரு பங்கில் உள்ளது. நிலைக்குத்துடன் அக்கோல் உண்டாக்கும் கோணம் $\tan^{-1} (3\sqrt{3})$ எனக் காட்டுக,

32. ஒரு கோலானது r ஆரையையுடைய ஒரு மழமழப்பான அரைக் கோள கிண்ணத்திற்குள்ளே முழுவதுமாகக் கிடக்கின்றது. அதன் புவியீர்ப்பு மையம் அதனை a, b என்னும் நீளமுள்ள பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றது. அது சமநிலையில் இருக்கும்போது, அடிவானத்திற்கு அதன் சாய்வு θ ஆக இருந்தால், $\sin =\theta \frac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$ எனக் காட்டுக.

அன்றியும், அக்கோலிற்கும், கிண்ணத்திற்கும் இடையேயுள்ள எதிர்த் தாக்கங்களையுங் காண்க.

33. ஒரு சீரான கோலொன்று, ஒரு நிலையான மழமழப்புள்ள கோளத்தின்மேல் கிடக்க, அதன் கீழ்முனை, அதே கோளத்தைத் தொடுகின்ற மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிரே அழுத்திக் கொண்டிருக்கிறது. கோலின் நீளம் l; கோளத்தின் ஆரை 'a' சமநிலையில் அக்கோல் நிலைக்குத்துடன் θ கோணம் உண்டாக்கினுல்;

$$a=2\,l \sin \frac{\theta}{2} \cos^3 \frac{\theta}{2}$$ எனக் காட்டுக.

34. ஒரு சீரான செவ்வகப் பலகை, தனது தளம் நிலைக்குத்திலிருக்கும்படியும், ஒரே கிடைக் கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று C என்னும்

தூரத்தில் இருக்கின்ற இரண்டு மழமழப்பான முளைக்கட்டைகளின்மீது அதன் பக்கங்கள் a, b பொருந்தும்படியும் வைக்கப்படுகிறது. அடி வானத்துடன் 'b' நீளமுள்ள பக்கத்தின் சாய்வு θ எனில்,
$2c \cos 2\theta = b \cos \theta - a \sin \theta$ எனக் காட்டுக.

35. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் உயரம் h; அதன் உச்சிக்கோணம் 2α. அது, தனது உச்சி ஒரு மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரைத் தொடும்படியும், அதன் சாய்பக்கம் அச்சுவருக்குச் சமாந்தரமாய் அதிலிருந்து C என்னும் தூரத்திலுள்ள ஒரு மழமழப்பான கிடைக்கோலின் மீது பொருந்தும்படியும் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. சமநிலையில், கூம்பின் அச்சு அடிவானத்துடன் θ கோணம் உண்டாக்கினால்,
$3h = 4c \sec^2 (\theta - \alpha) \sec \theta$ எனக் காட்டுக.

36. AB, AC என்ற நிலையான கோல்கள் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் ஒவ்வொன்றும் நிலைக்குத்திற்கு 30° சாய்ந்து இருக்கின்றன. ஒவ்வொன்றும் ω எடையுடன், கோல்களில் உராய்வில்லாமல் வழுக்கக் கூடிய இரு வளையங்களுக்கு ஒரு இழையின் முனைகள் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. இழையின் மையப் புள்ளியிலிருந்து W நிறையுள்ள ஒரு எடை தொங்கவிடப்பட்டிருக்கிறது. சமநிலையில், இழையின் ஒவ்வொரு பாதியும் நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ எனில்,

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}\,(W + 2\omega)}{W}$$ என நிறுவுக.

37. ஒவ்வொன்றும் 'a' ஆரையும், W எடையுமுடைய இரு மழமழப்பான கோளங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு ஒரு மழமழப்பான கோள வடிவ கிண்ணத்தில் கிடக்கின்றன. கிண்ணத்தின் ஆரை b எனில், இரு கோளங்களுக்கிடையே உள்ள அழுத்தம்

$$\frac{Wa}{\sqrt{b^2 - 2ab}}$$ எனக் காட்டுக.

38. கொடுக்கப்பட்ட எடையையுடைய ஒரு சித்திரப் படம், ஒரு மழமழப்பான ஒரு சுவருக்கெதிரே நிலைக்குத்திலே, அச்சுவரிலே அறைந்த ஒரு மழமழப்பான முளைக்கட்டையின்மீது செல்லும் ஓரிழையினாலே, சமநிலையில் தாங்கப்படுகின்றது. அவ்விழையினுடைய முனைகள் சட்ட மேல் விளிம்பின் மையத்திலிருந்து சமதூரத்திலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்குத் தொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அம்முளைக்கட்டையில் இழையின் பகுதிகளுக்குள்ளடங்கிய கோணம் 60° அவ்விழையிலுள்ள இழுவிசையை, அவ்விழை அதன் நீளத்தில் மூன்றில் இரண்டு பங்குகளாகக் குறுக்கப்பட்டால் அதில் உண்டாகும் இழுவிசையோடு ஒப்பிடுக.

39. 6 தசம மீட்டர் நீளமும், 4 தசம மீட்டர் அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகப் பலகை அதன் நீளப் பக்கங்கள் கிடையாக இருக்கும் வண்ணம், அப்பலகையின் மேல் முனைகளில் உள்ள மழமழப்பான இரு வளையங்கள் வழியே அதன் நீளவாட்டிலும், அப்பலகைக்கு மேலே உள்ள ஒரு மழமழப்பான முளைக்கட்டைமீதும் செல்லும் 16 தச மீட்டர், நீளமுள்ள ஓர் இலேசான இழையினல் தொங்கவிடப்படுகிறது. அப்பலகையின் எடை W கிலோ கிராம் எனில், அவ்விழையின் இழுவிசையையும், ஒவ்வொரு வளையத்தின்மீதுள்ள அழுத்தத்தையும் காண்க.

8. ஒரு தளத்து விசைகளாலே தாக்கப் படுகின்ற ஒரு பொருளின் சமநிலையின் பொது நிபந்தனைகள்

General Conditions of Equilibrium for a system of coplanar forces

1. தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரேதளத்திலே தாக்குகின்ற எவ்விசைத் தொகுதியும் ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ ஒடுக்கப்படக்கூடும்.

விசை யிணைகரத்தின்படி, தம் திசைகள் சந்திக்கின்ற எவையேனும் இரு விசைகள் ஒரு விசையாகச் சேர்க்கப்படலாம். அன்றியும், இரு இணை விசைகள், சமனுமெதிரு மல்லாதவையாயின், ஒரு விசையாகக் கூட்டப் படக்கூடியன.

முதலாவதாக, கொடுக்கப்பட்ட தொகுதியிலுள்ள எல்லா இணை விசைகளையும், அல்லது இணை விசையினங்களையும் ஒருமித்துக் கூட்டுக.

மீந்திருக்கும் தொகுதியில், ஒரு சுழலிணையை உண்டாக்காத, எவை யேனும் இருவிசைகளை எடுத்து அவற்றின் விளைவு R_1 என்பதைக் காண்க. பிறகு, R_1 உடன் அத்தொகுதியின் ஏற்றவொரு மூன்றும் விசையைச் சேர்த்து, அவற்றின் விளைவு R_2 என்பதைக் காண்க. அதன் பின் இந்த R_2ற்கும், அத்தொகுதியின் ஏற்றவொரு நாலாம் விசைக்கும் உள்ள விளைவைக் காண்க. இவ்வாறே, எல்லா விசைகளும் தீரும் வரை எடுத்து விளைவு காண்க,

இறுதியாக, நாம் ஒரு தனி விசையைப் பெறவேண்டும்; அல்லது ஒரு சுழலிணையை உண்டாக்கும் சமனுமெதிருமாயுள்ள இரு இணை விசைகளைப் பெறவேண்டும்.

2 தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே ஒரு விசைத் தொகுதி தாக்க, ஒரே நேர்கோட்டிலல்லாத மூன்று புள்ளிகள் ஒவ்வொன்று பற்றி எடுக்கும் அவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை, தனித்தனியே பூச்சியமானுல், அவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

முந்திய பிரிவின்படி, அத்தகைய விசைத் தொகுதி யொன்று ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ ஒடுங்கும்.

இங்கு, அவ்விசைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணையாக ஒடுங்கா; ஏனெனில், அவ்வாறு ஒடுங்கினுல், அவற்றினுடைய தளத்திலேயுள்ள புள்ளிபற்றி எடுக்கும் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை, பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலிக்குச் சமனுகும். (அதிகாரம் 6-பிரிவு-3) இது, நமது எடுகோளுக்கு எதிராகும்.

எனின், அவ்விசைத் தொகுதி, ஒரு தனிச் சுழலிணையாக ஒடுங்க முடியாது. ஆகவே, அத்தொகுதி ஒரு தனி விசை Fஆகவோ அல்லது சமநிலையிலோ இருத்தல்வேண்டும்.

திருப்புத் திறன்கள் எடுக்கப்படும் மூன்று புள்ளிகளும் A, B, C என்பனவாகுக.

ஒரு விசைத் தொகுதியினுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை, அவற்றினது விளைவினது திருப்புத் திறனுக்குச் சமனுகையால், புள்ளி Aபற்றி எடுக்கும் Fஇனது திருப்புத் திறன் பூச்சியமாதல் வேண்டும். ஆகவே, Fஎன்பது பூச்சியமாதல் வேண்டும் அல்லது Fஆனது Aவழியாகச் செல்லவேண்டும். இதேபோல், Bபற்றி எடுக்கும் Fஇனது திருப்புத் திறன் பூச்சியமாதலால், Fஎன்பது பூச்சியமாக வேண்டும் அல்லது F ஆனது B வழியாகச் செல்லவேண்டும். அதாவது, Fஆனது பூச்சியமாகும் அல்லது கோடு ABவழித் தாக்கும். கடைசியாக, Cபற்றி, எடுக்கும் திருப்புத் திறன் பூச்சியமாகையால், Fஎன்பது பூச்சியமாகும் அல்லது Cவழிச் செல்லவேண்டும்.

ஆனுல், புள்ளிகள் A, B, C என்பன ஒரே நேர்கோட்டில் இல்லாமையால், Fஆனது AB வழியும் தாக்கி C வழியும் செல்ல இயலாது.

ஆகவே, ஏற்கத்தக்க ஒரேவகை F என்பது பூச்சியமாயிருத்தல் வேண்டும்.

அதாவது, விசைகள் சமநிலையில் இருத்தல்வேண்டும் என்க.

கி. தே.

கீழ்க் காணும் நிபந்தனைகள் நிறைவேறினாலும், ஒரு விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

(i) A, B என்னும் இரு புள்ளிகள் ஒவ்வொன்று பற்றி எடுக்கும் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை தனித்தனிப் பூச்சியமாக வேண்டும். மேலும், (ii) AB இனது நீளவாட்டில் விசைகளின் பிரித்த பாகங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகவேண்டும்.

இதன் காரணம் பின்வருமாறு :

(i)இல் உள்ள நிபந்தனை உண்மையாயின், முந்திய பிரிவின்படி, விளைவு பூச்சியமாகும் அல்லது AB யினது நீளவாட்டில் தாக்கும். ஆனால், (ii) இன்படி, AB என்னும் திசையில் விளைவு யாதும் இல்லை.

ஆகவே, விளைவு விசை பூச்சியமாகும். அன்றியும், விளைவு சுழலிணை யாதலும் இயலாது. எனவே, அவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

கி. தே. 2.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே ஒரு விசைத் தொகுதி தாக்க, ஒரே நேர்கோட்டிற் கிடக்காத மூன்று புள்ளிகள் ஒவ்வொன்று பற்றியும் எடுக்கும் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமல்லாத ஒரே மதிப்பு கொண்டால், அவ்விசைத்தொகுதிக் இம்மதிப்பு, திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்கும்.

நேர்கோட்டில் அமையாத புள்ளிகள் A, B, C ஆகுக. இப்பிரிவின் படி, எந்த விசைத்தொகுதியும் ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு சுழலிணையாகவோ ஒடுங்கும்; அல்லது, அது சமநிலையில் இருக்க வேண்டும்.

ஆனால், A, B, C என்பதுபற்றி எடுக்கும் திருப்புத் திறன்கள் சமமாயினும், பூச்சியமாகாததால், அவ்விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இருக்க முடியாது.

ஆகவே, விசைத்தொகுதி ஒரு தனிச் சுழலிணையாகவோ அல்லது தனி விசையாகவோ ஒடுங்கவேண்டும்.

அத்தொகுதி ஒரு தனி விசையாக ஒடுங்கினால், அதன் தாக்கக்கோடு AB யிற்கு இணையாக வேண்டும்.

ஏனெனில் A, B இவற்றைப்பற்றிய திருப்புத் திறன்கள் இதேபோல, இத் தாக்கக் கோடு BCக்கும் இணையாக வேண்டும்.

ஆனால், A, B, C என்பன ஒரே கோட்டில் அமைவன அல்ல.

எனின், நமது தற்கோள் தவறு.

ஆகவே, அவ்விசைத்தொகுதி ஒரு சுழலிணைக்கு ஒடுங்கும்.

இச்சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் எப்புள்ளி பற்றியும் ஒன்றே ஆவதால், அது, A அல்லது B அல்லது C பற்றி எடுக்கும் திருப்புத் திறனுக்குச் சமமாகும்.

3 உதாரணம்

ABCDEF என்பது ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணம். P,2P,3P,4P, 5P, 6P என்ற விசைகள் முறையே BA, BC, DC, ED, EF, AFஎன்பன வழிச் செயல்படுகின்றன, இந்த ஆறு விசைகளும் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக் காட்டி, அதன் திருப்புத் திறனைக் காண்க,

அறுகோணத்தின் ஒவ்வொரு பக்கமும் 'a' ஆகுக·

A என்ற புள்ளி பற்றி எல்லா விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை

$$=P\times O+2P\times a\sin 60^\circ-3P\times 2a\cos 30^\circ-4P\times 2a\cos 30^\circ$$

$$+5P.\, a\sin 60^\circ+6P\times O$$

$$=2P.a\frac{\sqrt{3}}{2}-6Pa\frac{\sqrt{3}}{2}-8Pa\frac{\sqrt{3}}{2}+5Pa\frac{\sqrt{3}}{2}=-7\frac{\sqrt{3}}{2}Pa$$

இதேபோல், B, C என்பன ஒவ்வொன்று பற்றியும் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை $=-\frac{7\sqrt{3}}{2}Pa$ ஆகும்.

எனவே, A, B, C என்ற ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாத மூன்று புள்ளிகள் பற்றி இவ்விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை சமமாதலால். இவ்விசைத் தொகுதி $-\frac{7\sqrt{3}}{2}$ Pa என்ற திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்கு ஒடுங்கும்.

பயிற்சி 8·1

1. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் இரு சமவெட்டிகளால் அளவிலும், திசையிலும் குறிக்கப்பட்ட மூன்று விசைகள் எல்லாம் உச்சிகளிலிருந்து செயல்பட்டுச் சமநிலையில் இருந்தால், அம் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாகவேண்டும் என நிருபி.

2. ABCD என்பது தன் பக்கம் 2 அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு சதுரமாகும். a, b, c, d என்ற விசைகள் AB, BC, CD, DA என்று வரிசைக் கிரமமாக எடுத்த பக்கங்களின் வழியேயும், $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ என்ற விசைகள் முறையே, AC, DB என்பன வழியேயும் செயல்படுகின்றன. $p+q=c-a$, $p-q=d-b$ எனின், இவ்விசைகள் $(a+b+c+d)$க்குச் சமனான திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

(குறிப்பு : A, B, C பற்றிய விசைகளின் திருப்புத் திறன்கள் சமமென்று நிரூபிக்கவும்.)

3. P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 என்ற விசைகள் ஒரு ஒழுங்கான அறுகோணத்தின், ஒரொழுங்கில் எடுத்த பக்கங்கள் வழியே தாக்குகின்றன. $\sum P=O$; $P_1-P_4=P_3-P_6=P_5-P_2$ எனின், அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

4. ABCDE என்பது ஒரு ஒழுங்கான ஐங்கோணம். AB, BC என்ற பக்கங்களின் வழியே முறையே 3, 5 அலகுகள் அளவுடைய விசைகள் தாக்குகின்றன, கொடுக்கப்பட்ட விசைகளுடன் சமநிலையில் இருப்பதற்கு DC, DE, AE என்ற பக்கங்கள் வழியே செயல்பட வேண்டிய விசைகளின் அளவுகளைக் காண்க.

5. ABCDEF என்ற ஒழுங்கான அறுகோணத்தில், AB, CD, EF என்பவற்ருல் முற்றிலும் குறிக்கப்படும் விசைகள், அறுகோணத்தின் பரப்பிற்குச் சமமான திருப்புத் திறனுடைய சுழலிணைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

4 தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது, ஒரு தளத்தில், ஒரு விசைத் தொகுதி தாக்க,அவற்றினுடையதளத்திலேஉள்ள இரு கோடுகளுக்கு, ஒவ்வொன்றுக்கும் சமாந்தரமாக அவற்றின் கூறுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகவும், யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கும் அவற்றினுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகையும் பூச்சியமாகவும் இருந்தால், அத்தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும்.

அத்தகைய விசைத்தொகுதி, இவ்வதிகாரம், பிரிவு 1 இன் படி, ஒரு தனி விசையாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணை யாகவோ ஒடுங்கும்.

இப்பொழுது, அவ்விசைகளின் தளத்திலேயுள்ள இரு கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாக அவ்விசைகளுடைய கூறுகளின் கூட்டுத்தொகைகளானவை தனித்தனிப் பூச்சியமாதலால், இக்கோடுகளுக்குச் சமாந்தரமாக அவற்றின் விளைவு விசையினுடைய கூறுகளும் பூச்சியமாகும்.

ஆகவே, நம் எடுகோள்படி, விளைவு விசை பூச்சியமாகும்.

மேலும், அவ்விசைகள் ஒரு தனிச் சுழலிணையாக ஒடுங்கா; ஏனெனில், அவை அவ்வாறு ஒடுங்கினால், தனது தளத்திலேயுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கும் இச் சுழலிணையினது திருப்புத் திறன் பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறிலிக்குச் சமனாகும். ஆனால், இது நம் எடுகோளுக்கு எதிர்.

எனவே, அவ்விசைத்தொகுதி சமநிலையில் இருத்தல் வேண்டும்.

மேற் கூறிய நிபந்தனைகள் ஒரு விசைத் தொகுதியின் சமநிலைக்குப் போதியன (sufficient) என்று காட்டினோம்.

அவை வேண்டியளவு (necessary) மாகும்.

முதலிரண்டு நிபந்தனைகளே நிறைவேறியதாகக் கொள்வோம்.

ஆயின், அவ்விசைத் தொகுதி ஒரு தனிச் சுழலிணையாகச் சுருங்கலாம். ஏனெனில், இச் சுழலிணையினுடைய விசைகள் சமனும் எதிருமாகையால் யாதேனுமொரு திசையிலுள்ள, அவற்றினுடைய கூறுகள் பூச்சியமாகும் தகையனவாயிருக்கும் ஆகையால், யாதேனுமொரு மூன்றும் திசையில் விசைகளைப் பிரிப்பதனால், நமக்கு இதற்குமேல் அதிகமான நிபந்தனையொன்றையும் தராது. எனவே, இங்கு மூன்றும் நிபந்தனையும் நிறைவேறினாலன்றி விசைகள் சமநிலையில் நில்லா.

இனி, அவ்விசைத் தொகுதிகளின் கூறுகளானவை, கொடுக்கப் பட்ட ஒரு கோட்டின் நீளவாட்டில் பூச்சியமாயும், தந்தவொரு புள்ளி பற்றி எடுத்த திருப்புத் திறன்களும் பூச்சியமாயும் இருப்பதாகக் கொள்க.

இவ்வகையில், அவ்விசைகளானவை கொடுக்கப்பட்ட கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய், தந்த புள்ளிவழிச் செல்கின்ற ஒரு தனி விசையாக ஒடுங் கலாம். ஆகவே, வேறொரு கோட்டிற்குச் சமாந்தரமாய் உள்ள கூறு களின் கூட்டுத் தொகையும் பூச்சியமாதல் வேண்டும் என்பதைக் காண்கிறோம்,

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகள் ஒரு விசைத் தொகுதியின் சமநிலைக்குப் போதியனவும், வேண்டியனவும் எனப் பெறுகிறோம்.

5. முந்திய பிரிவின் விவரணத்தில் விசைகளைப் பிரிக்கவேண்டிய திசைகள் பற்றி ஒன்றும் சொல்லப்படவில்லை என்பது கவனிக்கப்பட வேண்டும்,

ஆயினும், செய்முறையில், செங்கோணங்களிலுள்ள இரு திசை களினுடைய வழியே பிரித்தல், எப்பொழுதுமே பெரும்பாலும் வசதியாக இருக்கும்.

ஆகவே, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது, ஒரு தளத்திலே தாக்கு கின்ற யாதேனு மொரு விசைத் தொகுதியினுடைய சமநிலை நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு பெறலாம்:

I யாதேனுமொரு நிலையான திசையில் விசைகள் எல்லாவற்றி னுடைய பிரித்த பகுதிகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சி யத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

II முந்திய திசைக்கு, நிலைக்குத்துத் திசையில் விசைகள் எல்லா வற்றினுடைய பிரித்த பகுதிகளின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

III அவ்விசைகளினுடைய, தளத்திலே உள்ள யாதேனு மொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கும் அவற்றினுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

I உம், II உம் முழுமையாக அப்பொருளுக்கு இயக்கமிருக்கப்படா தென்பதை உறுதிப்படுத்துகின்றன.

III வது யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி அப்பொருளுக்குச் சுழற்சி யியக்கம் இருக்கப்படா தென்பதை உறுதிப்படுத்துகிறது.

யாதேனு மொரு குறித்த வகைக்கு, மேலே தந்த சமநிலை நிபந்தனை களைப் பிரயோகிக்குமிடத்து, நாம் பிரிக்கும் திசைகளைத் தகுந்தவாறு தேர்ந்தெடுத்தல் மிக்க சுருக்கங்களைச் சமன்பாடுகளில் பெரும்பாலும் புகுத்தலாம்.

பொதுவாகக் கிடைத் திசையும், நிலைக்குத்துத் திசையும் மிகவும் ஏற்றனவாகும்.

இனி, நாம் திருப்புத் திறன்கள் எடுக்கும் புள்ளியினது நிலை முக்கிய மானது. கூடியவரை குறைந்த தொகை விசைகளே திருப்புத் திறன் சமன்பாட்டில் இடம்பெறத் தக்கனவாக அது, தேர்ந்தெடுக்கப்பட வேண்டும்.

மேலுள்ள மூன்று நிலையியல் சம்பந்தங்களும், ஒரு விசைத் தொகுதி யின் கூற்றுப் பகுதிகளுக்கிடையே யுள்ள வடிவ கணிதத் தொடர்பு களோடு கூடி, ஒரு தளத்து விசைகளாலே தாக்கப்படுகின்ற யாதேனு மொரு தொகுதியின் சமநிலையை நிச்சயிப்பதற்குப் பொதுவாகப் போதியனவாகும்.

6. இனிப் பொதுச் சமநிலை நிபந்தனைகளின் பிரயோகத்தினுடைய உதாரணங்கள் சிலவற்றைத் தருவோம்.

யாதேனுமொரு நிலையியல் உத்திக் கணக்கைத் தீர்க்குமிடத்துப் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றவேண்டும் :

(i) தரப்பட்ட நிபந்தனைகளுக்கு ஏற்பப் படம் வரைக.

(ii) ஒரு பொருள்மீது அல்லது பொருள்களின்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் எல்லாவற்றையும் குறிக்கவேண்டும்.

இவ்வண்ணம், ஒரு பொருள் வேறொன்றுக் கெதிரே அழுத்து மிடத்து (நிர்ணயிக்கவேண்டிய) ஓர் எதிர்த் தாக்கத்தைக் குறிக்க வேண்டும்.

யாதேனு மொரு தாங்கும் இழையினது நீளத்திற்கு ஓரிழு விசையைக் குறிக்கவேண்டும்.

ஒரு பொருள், வேருெரு பொருளுக்கு அல்லது நிலையான புள்ளிக்குப் பிணைக்கப்படுமிடத்து, ஓரெதிர்த் தாக்கத்தைக் குறிக்கவேண்டும்.

ஒரு பொருள், ஒரு மழமழப்பான பரப்பின்மீது அழுத்தும்போது, எதிர்த் தாக்கம் அப்பரப்பிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

ஒரு கோல், ஒரு மழமழப்பான ஒரு மூளைக்கட்டையின்மீது பொருந்தியிருக்கும்போது, மூளைக்கட்டையின் எதிர்த் தாக்கம், கோலுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

ஓர் இலேசான இழையிலுள்ள இழுவிசை, அவ்விழை முழுவதும் ஒரே அளவுள்ளதாகும். இவ்விழை மழமழப்பான மூளைக்கட்டைகள் மீதோ அல்லது கப்பிகள் வழியோ செல்லும்போது, அதன் இழுவிசை மாருதிருக்கும்.

ஒரு பொருளின் எடை அதன் புவியீர்ப்பு மையம் வழியே நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும்.

(iii) அவ்வுக்திக் கணக்கிலுள்ள ஒவ்வொரு பொருளையும் அல்லது பொருட்டொகுதியையும் தாக்கும் விசைகளை ஏற்ற இரண்டு நிலைக்குத்துத் திசைகளின் நீளத்தில் பிரித்து, அப் பிரித்த விசைப் பகுதிகளின் குறியில் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக,

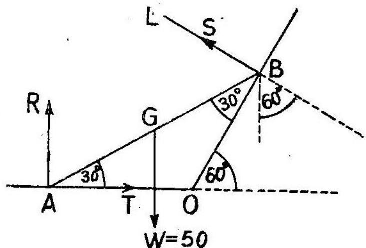
(iv) அன்றியும், ஏற்றதான யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கும் விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துக.

(v) அப்படத்திலுள்ள நீளங்களை அல்லது கோணங்களைத் தொடர்புபடுத்தும் வடிவ கணித சம்பந்தங்கள் இருப்பின், அவற்றை எழுதுக.

7 உதாரணம் 1

50 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு சீர்க்கோலொன்று, தன் ஒரு முனை கிடைத் தளத்தின் மீதும், மற்றை முனை அடிவானத்திற்கு 60° சாய்ந்த ஒரு சாய்தளத்தின் மீதுமாகக் கிடக்கின்றது. அச் சாய்தளமும் கிடைத் தளமும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கு அக்கிடைத் தளத்திற் கிடக்கின்ற கோலின் முனை ஓரிழையினுல் இணைக்கப்பட்டு, அக்கோல் சமநிலையில் வைக்கப்படுகின்றது. அக்கோல் கிடைத்தளத்திற்கு 30° சாய்ந்திருந்தால் அவ்விழையின் இழுவிசையையும், அத் தளங்களுடைய எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

AB என்பது அக்கோலையும், AO என்பது கிடைத்தளத்தையும் OB என்பது அச் சாய்தளத்தையும் குறிக்கட்டும். T என்பது அவ்விழை AO யின் இழுவிசையாகுக. அக்கோலின் எடை 50 கிலோ கிராம். AB யின் மையப் புள்ளி G வழியே நிலைக்குத் தாய்க் கீழே செயல்படும். R, S என்பன முறையே நிலைக்குத்தாயும், OB யிற்குச் செங்குத்தாயும் A, B என்பனவற்றிலுள்ள எதிர்த் தாக்கங்களாகுக.



படம். 73

விசைகளைக் கிடையாகப் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$T = S.\ \sin 60^\circ \qquad (1)$$

விசைகளை நிலைக்குத்தாகப் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$R + S \cos 60^\circ = 50 \qquad (2)$$

அன்றியும், A பற்றித் திருப்புத் திறன்கள் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$50\,a \cos 30^\circ = S.\ 2a.\ \sin 60^\circ \qquad (3)$$ [2a, என்பது கோலின் நீளமாகக் கொள்க]

$\therefore S = 25$ கிலோ கிராம் எடை

இந்த மதிப்பை (2)இல் பிரதியிட,

$$R + 25 \times \tfrac{1}{2} = 50$$

$\therefore R = 37\tfrac{1}{2}$ கிலோ கிராம் எடை

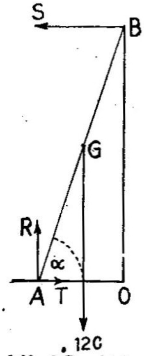
S இன் மதிப்பை (i)இல் பிரதியிட,

$$T = \frac{25\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$ கிலோ கிராம் எடை

உதாரணம் 2

120 கிலோ கிராம் எடையும், 7·5 மீட்டர் நீளமும் உள்ள ஒரு ஏணியானது, தன்னுடைய முனைகளுள் ஒன்று மழமழப்பான ஒரு நிலைகுத்துச் சுவருக்கு எதிராயும், மற்றை முனை மழமழப்பான தரையின்மீதும் இருக்கக் கிடக்கின்றது. அதன் தரையின் மீதுள்ள கீழ் முனையானது, அச்சுவரும் தரையும் சந்திக்கும் சந்திப்புக்கு, 2.1 மீட்டர் நீளமுள்ள ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டு அவ்வேணி ஓய்வில் இருக்கிறது. இழையின் இழுவிசையையும், தரை, சுவர் இவற்றின் எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

இழை அறுபடாமல், அது தாங்கக் கூடிய மீப்பெரு இழுவிசை $24\frac{1}{2}$ கிலோ கிராம் எனில், 40 கிலோ கிராம் எடையுள்ள பையன் ஏணியின் மேல் எவ்வளவு உயரம் ஏறலாம்?



படம் - 74

AB என்பது ஏணியையும், G அதன் மையப் புள்ளியையும் குறிக்கட்டும்.

R, S என்பன தரை, சுவர் என்னு மிவற்றினுடைய எதிர்த் தாக்கங்களாகுக.

T என்பது இழையின் இழுவிசை யாகுக.

$\angle BAO = a$ எனின், $\cos a = \frac{2 \cdot 1}{7 \cdot 5} = \frac{7}{25}$;

$\therefore \sin a = \frac{24}{25}$

அவ்வேணியின்மீது தாக்குகின்ற விசைகளுடைய கிடைக்கூறுகளையும், நிலைக்குத்துக் கூறுகளையும் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்த நாம் பெறுவது:

$$R - 120 = O \quad (1)$$

$$S - T = O \quad (2)$$

A பற்றிய விசைகளின் திருப்புத் திறன்களை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$120 \times AG \cos a = S \times AB \sin a$$

$$120 \times \frac{AB}{2} \times \frac{7}{25} = S \times AB \times \frac{24}{25}$$

$\therefore\ S = 17\frac{1}{2}$ கிலோ கிராம்

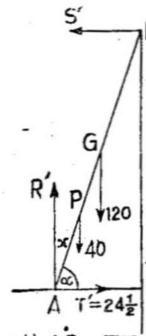
$\therefore\ T = S = 17\frac{1}{2}$ கிலோ கிராம்

$\therefore\ R = 120$ கிலோ கிராம்

(ii) பையன் ஏணியில் x மீட்டர் ஏறினதும், இழை தன்னுடைய மீப்பெரு இழுவிசையை அடையட்டும். அப்பொழுது, பையனின் நிலை P எனக் குறிக்க. இப்பொழுது A, B யிலுள்ள எதிர்த் தாக்கங்களை R′, S′ என்க. இழுவிசை $T' = 24\frac{1}{2}$ கிலோ கிராம். விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் பிரிக்க நாம்பெறுவது

$R'-160° = O$ (1)

$S'-24\frac{1}{2} = O$ (2)



படம் - 75

A பற்றிய விசைகளின் திருப்புத் திறன் காண நாம் பெறுவது

$$40 \times AP \cos \alpha + 120 \times AG \cos \alpha$$
$$= S' \times AB \sin \alpha$$

(அ-து) $$40 x \frac{7}{25} + 120 \quad \frac{AB}{2} \frac{7}{25}$$

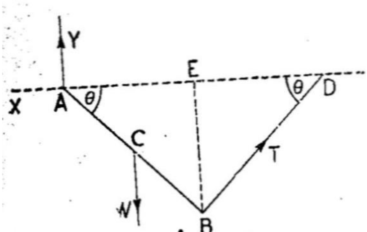
$$= S' \cdot AB \frac{24}{25}$$

$S' = 24\frac{1}{2}$ எனப் பிரதியிட்டு, சுருக்கினல்

$x = 4.5$ மீட்டர் என வரும்.

உதாரணம் 3

ஒரு சீர்க்கோலொன்றின் ஒரு முனை ஒரு பிணையலுக்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. மற்றை முனை, அதில் கட்டிய ஒரிழையினுலே தாங்கப்படுகின்றது. அக்கோலும் இழையும் கிடைத் தளத்திற்கு ஒரே கோணம் θ வில் சாய்ந்துள்ளன. அக்கோலின் எடை W எனின், அப் பிணையிலுள்ள தாக்கம் $\frac{W}{4}\sqrt{8+\text{cosec}^2\theta}$ எனக் காட்டுக.



படம் - 76

AB என்பது கோலையும், C அதன் மையப் புள்ளியையும், BD என்பது A வழியாகச் செல்லுங் கிடைக் கோட்டை Dயிற் சந்திக்கும் இழையையும் குறிக்கட்டும்.

அவ்விழையின் இழுவிசை T ஆகுக.

பிணையலிலுள்ள தாக்கம், அளவு திசைகளில் அறியப்படாதது. ஆகையால், படத்தில் காட்டியபடி, இத் தாக்கத்தினுடைய கிடைக் கூறும், நிலைக்குத்துக் கூறும் X, Y எனக் கொள்வோம்.

BE என்பதை ADக்குச் செங்குத்தாக வரைக.

ஆயின், $AD=2AE=2AB\cos\theta$

இனி, விசைகளைக் கிடையாயும், நிலைக்குத்தாயும் பிரிக்க நாம் பெறுவன

$$X=T\cos\theta \quad (1)$$

$$Y+T\sin\theta=W \quad (2)$$

அன்றியும், A பற்றித் திருப்புத் திறன்களை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$W.AC\cos\theta=T.AD\sin\theta=T.\,2\,AB\cos\theta\sin\theta \quad (3)$$

(3) இல் இருந்துT$=\dfrac{W.AC}{2\,AB\sin\theta}=\dfrac{W}{4\sin\theta}$

எனின், (1), (2) என்பனவற்றால்,

$$X=\frac{W}{4}\cot\theta;\ \ Y=W-\frac{W}{4}=\frac{3W}{4}$$

ஆகவே, பிணையலிலுள்ள தாக்கம்$=\sqrt{X^2+Y^2}$

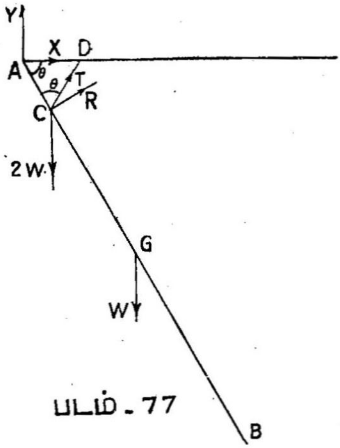
$$=\frac{W}{4}\sqrt{9+\cot^2\theta}=\frac{W}{4}\sqrt{8+\operatorname{cosec}^2\theta}$$

உதாரணம் 4

AB என்பது 8a நீளமுள்ள ஒரு சீர்க்கோலாகும். அது A என்னும் நிலையான முனை பற்றிக் கட்டின்றித் திரும்பத்தக்கது. C என்பது தன் எடை அக்கோலின் எடைக்கு இரு மடங்காயும், அதன்மீது வழுக்கக் கூடியதுமான ஒரு மழமழப்பான வளையம். அவ்வளையம் A என்ற புள்ளி இருக்கும் அதே கிடைத் தளத்தில் உள்ள D என்னும் புள்ளிக்கு, CD என்னும் ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. AD, CD என்பவை ஒவ்வொன்றும் a நீளமுடையதாயின், அத்தொகுதி சம நிலையில் இருக்கும்போது அவ்வளையத்தினது நிலையையும், அவ்விழையின் இழுவிசையையும் காண்க.

அக்கோலினது எடை W ஆயின், அக்கோலின் நிலையான புள்ளி A இல் உள்ள தாக்கத்தையும் காண்க.

AB யின் மையப்புள்ளி G ஆகுக. C யின் எடை 2W ஆகும். சமநிலையில், CD யில் உள்ள இழுவிசையை T என்றும், AB க்கு செங்குத்தாக C யில் உள்ள எதிர்த் தாக்கத்தை R என்றும் குறிப்போம்.



படம் - 77

$\angle DAC = \theta$ என்க.

$AD = CD$ ஆதலின்,

$\angle ACD = \angle DAC = \theta$.

இப்பொழுது, வளையம் C யின்மீது செயல்படும் விசைகளாவன

(i) CD யில் உள்ள இழுவிசை, T

(ii) வளையத்தின்மீது கோலின் எதிர்த் தாக்கம், ABக்குச் செங்குத்தாக C யில் செயல்படும் R

(iii) வளையத்தின் எடை, நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும், 2 W என்பனவாகும். வளையம் Cயின் சமநிலையைக் கருதி, அதன்மீது தாக்கும் விசைகளை ABயின் நீளவாட்டில் பிரிப்பின், நாம் பெறுவது

$$T \cos \theta = 2 W \cos (90^\circ - \theta)$$

(அ-து) $T \cos \theta = 2 W \sin \theta$

$\therefore T = 2 W \tan \theta$ (i)

AB என்ற கோலையும், C என்ற வளையத்தையும் ஒருமிக்கக் கருதின்ல், இத்தொகுதியின்மேல் செயல்படும் விசைகளாவன :

(i) Aஇல் உள்ள பிணையலின் எதிர்த் தாக்கம். இது, அளவு திசைகளில் அறியப்படாததால், படத்தில் காட்டியபடி இத்தாக்கத்தினுடைய கிடைக் கூறும், நிலைக்குத்துக் கூறும் X, Y எனக் கொள்வோம்.

(ii) கோலின் எடை W

(iii) வளையத்தின் எடை 2 W

(iv) CDயில் உள்ள இழுவிசை T

இத்தொகுதியில் வளையத்திற்கும், கோலுக்கும் இடையே உள்ள தாக்கமும், எதிர்த் தாக்கமும், அவை ஒன்றுக்கொன்று சமப்படுத்திக் கொள்வதால், இடம் பெறுது என்பது கவனிக்கப்படவேண்டும்.

முழுப் பொருட்டொகுதிக்கும் A பற்றிய திருப்புத் திறன் எடுக்க நாம் பெறுவது

$$W.\ 4\ a \cos\theta + 2\ W.AC \cos\theta = T.\ AC.\ \sin\theta \quad (2)$$

இப்பொழுது $AC = 2\ a\cos\theta;\ T = 2\ W\tan\theta$

இம்மதிப்புகளை (2) இல் பிரதியிட்டுச், சுருக்க, நாம் பெறுவது

$$\cos 2\theta = -\cos\theta$$

$$= \cos(\pi - \theta)$$

$$\therefore\ 2\theta = \pi - \theta \therefore\ \theta = \pi/3$$

$$\therefore\ AC = AD = a$$

இது வளையதின் நிலையைக் கொடுக்கிறது.

அன்றியும், $T = 2W\tan\theta$

$$= 2W\tan\pi/3 = \mathbf{2W\sqrt{3}}$$

இனி, முழுப் பொருட்டொகுதிக்கும், விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் பிரிக்க நாம் பெறுவது

$$X = T\cos 2\theta = 2W\sqrt{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -W\sqrt{3}$$

$$Y + T\sin 2\theta = 3W$$

$$\therefore\ Y = 3W - T\sin 2\theta$$

$$= 3W - 2W\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3W - 3W = O$$

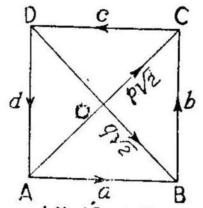
ஆகவே, அக்கோலின்மீது நிலையான புள்ளி A யில் உள்ள தாக்கம் $\sqrt{3}W$யிற்குச் சமனான ஒரு கிடைத் தாக்கமாகும்.

உதாரணம் 5

ABCD என்பது தன்பக்கம் 2 அலகுகள் நீளமுள்ள ஒரு சதுரமாகும். a, b, c, d என்ற விசைகள் AB, BC, CD, DA என்று வரிசைக் கிரமமாக எடுத்த பக்கங்கள் வழியாகவும், $p\sqrt{2}$, $q\sqrt{2}$ என்ற விசைகள் முறையே AC, DB வழியாகவும் தாக்குகின்றன. $p+q=c-a;$

$p-q=d-b$ எனில், கொடுக்கப்பட்ட விசைகள் $(a+b+c+d)$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமனெனக் காட்டுக.

குறிப்பு:- பயிற்சி 8.1 இல், இதே கணக்கின் விடையை நேர்த்தியான முறையில் A, B, C பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன்கள் சமமென்று நிரூபித்துப் பெறலாம் என்று கூறப்பட்டது. இவ்வுதாரணத்தில், அதே கணக்கை, இவ்வதிகாரத்தின் முறைப்படி தீர்வு காண்போம்.]



படம் - 78

AB, AD என்ற திசைகளில், விசைகளின் கூறுகளின் மொத்தம் முறையே X, Y எனக் கொள்க.

ஆயின்

$$X=a+p\sqrt{2}\cos 45^\circ+q\sqrt{2}\cos 45^\circ-c$$

$$=a+p+q-c=O$$

[$p+q=c-a$ என்ற காரணத்தால்]

$$Y=b+p\sqrt{2}\cos 45^\circ-q\sqrt{2}\cos 45^\circ-d$$

$$=b+p-q-d=O$$ [$p-q=d-b$ என்ற காரணத்தால்]

A பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை

$$=b.\ AB+c.\ AD-q\sqrt{2}.AO$$

$$=2b+2c-q\sqrt{2}.\sqrt{2} \quad \left[\begin{array}{l} AO=AB\cos 45^\circ \\ \quad =2\times\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\end{array}\right]$$

$$=2b+2c-2q$$

இனி $p+q=c-a$

$$\frac{p-q=d-b}{2q=c-a-d+b}$$ என்பதால்

ஆகவே, A பற்றிய விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை.

$$=2b+2c-(c-a-d+b)$$

$$=a+b+c+d$$

$X=O$, $Y=O$ என்பதாலும், தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமல்லாத

தாலும் விசைகள் ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்கும். ஒரு சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் எப்புள்ளி பற்றியும் ஒரே மதிப்பு கொள்வதால், இச் சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் $a+b+c+d$ ஆகும்.

பயிற்சி 8·2

1. W எடையுள்ள சீர் கோலொன்று தன் ஒரு முனை கிடைத்தளத்தின் மீதும், மற்றை முனை தந்தவொரு சாய்தளத்தின் மீதுமாகக் கிடக்கின்றது. அக்கிடைத் தளத்திற் கிடக்கின்ற முனைக்கும், அச்சாய்தளமும் கிடைத்தளமும் ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கும் இணைக்கப்பட்ட ஓரிழையினுல், அது சமநிலையில் வைக்கப்படுகின்றது. அக்கிடைத்தளத்திற்கு அக்கோலின் சாய்வு α என்பது அச் சாய்தளத்தின் சாய்வின் அரைப் பங்கெனில், அவ்விழையின் இழுவிசையையும் அத்தளங்களுடைய எதிர்த் தாக்கங்களையும் காண்க.

1. W எடையுடைய ஓரேணி தன்னுடைய ஒரு முனை மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராயும், மற்றை முனை மழமழப்பான ஒரு தரையின்மீதும் கிடக்க ஓய்வில் இருக்கின்றது. அடிவானத்தோடு அவ்வேணி 60° என்னும் சாய்வில் இருப்பதால், அவ்வேணி வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்குக் கீழ் முனையிற் பிரயோகிக்கப்படவேண்டிய கிடைவிசையைக் காண்க.

3. ஓரேணியானது தன்னுடைய முனைகள் மழமழப்பான ஒரு தரைமீதும், மழமழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக் கெதிராகவும் இருக்குமாறு கிடக்கின்றது. அதன்கீழ் முனையானது, அச்சுவரும் தரையும் சந்திக்கும், சந்திப்புக்கு ஓரிழையினுல் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அவ் விழைன் இழுவிசையைக் காண்க.

அவ்வேணியின் எடையின் அரைப் பங்கு எடையுள்ள ஒரு மனிதன், அதன் நீளத்தில் மூன்றிலிரண்டு பங்குக்கு ஏறிஞுயின், இழுவிசை என்னவாகும்?

4. W எடையை ஒருகோல் தன்புவி யீர்ப்பு மையம் C ஆல் a, b என்னும் நீளங்களுள்ள AC, BC என்னும் இரு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது. அக்கோல் ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், AD என்னும் மழமழப்பான தரையின்மீதும், DBஎன்னும் மழமழப்பான நிலைக்குத்துச் சுவருக் கெதிராயும் ஓய்வில் இருக்கின்றது. ஓரிழையானதும் D யிலுள்ள ஒரு கொக்கிக்கும் அக்கோலிலுள்ள P என்னும் ஒரு புள்ளிக்கும் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. T என்பது அவ்விழையின் இழு விசையாயும், θ, ϕ என்பன முறையே அடிவானத்தோடு அக்கோலும் இழையும்

உண்டாக்கும் சாய்வுகளாகவும் இருந்தால், $T = W. \dfrac{a \cos \theta}{(a+b)\ \sin\ (\theta - \phi)}$ எனக் காட்டுக,

5. ஒரு கோலானது தன்னுடைய ஒரு முனையிலுள்ள ஒரு பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்திலே இயக்கப்படத்தக்கது. அதன், மற்றை முனையில் அக்கோலின் எடையின் அரைப் பங்குக்குச் சமமான ஒரு எடை கட்டப்பட்டுள்ளது. இம்முனை அப்பிணையலுக்கு நிலைக்குத்தாக மேலே C என்னும் உயரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளிக்கு b என்னும் நீளமான ஓரிழையினாலே இணைக்கப்பட்டுள்ளது. அக்கோலினது எடை W ஆயின், அவ்விழையின் இழுவிசையையும், பிணையலில் உள்ள எதிர்த் தாக்கத்தையும் காண்க,

6. ஒரு சீர்க்கோலொன்றின் மேன்முனை ஒரு பிணையல் பற்றி நிலைக்குத்துத் தளத்திலே இயக்கப்படத்தக்கது. அதன் மற்றை முனை, அப்பிணையல் இருக்கின்ற அதே கிடைத் தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. இவ்விழையின் நீளம் அந்நிலையான புள்ளிக்கும், பிணையலுக்கும் இடையே யுள்ள தூரத்திற்குச் சமன். அவ்விழையின் இழுவிசை அக்கோலின் எடை W யிற்குச் சமனாயின், அக்கோல் அடிவானத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கிறதென்றும், அப்பிணையலிலுள்ள தாக்கம், $\frac{W}{5}\sqrt{10}$ என்றும் விசைகளுக்குச் சமமென்றும், இத்தாக்கம், அடிவானத்திற்கு $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்திருக்குமென்றும் காட்டுக.

7. W எடையுடைய ஒரு சீர் உத்திரத்தின் ஒரு முனை மழமழப்பான ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. ஓரிழை இணைக்கப்பட்டுள்ள அதன் மற்றை முனை அடிவானத்திற்கு a என்னும் கோணத்திற் சாய்ந்த ஒரு மழமழப்பான சாய்தளத்திற் கிடக்கிறது. அவ்விழை அச்சாய் தளத்தின் நுனியிலுள்ள ஒரு கப்பிக்கு மேலாகச் சென்று, P என்னும் எடையை நிலைக்குத்தாகத் தாங்குகிறது. $2P = W \sin a$ ஆயின், அவ்வுத்திரம் எல்லா நிலைகளிலும் ஒய்விற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

8. W என்னும் எடையையும், a என்னும் ஆரையையும் உடைய BCD என்னும் ஒரு வட்டத் தட்டு, இலேசான எடையும், தடிப்புமுள்ள ஒரு மழமழப்பான நாடாவினாலே தாங்கப்படுகின்றது. அந்நாடாவில் BCD யினது நீளத்திற்கு அத்தட்டைச் சுற்றியிருக்க, அதன் முனைகள் ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரிலுள்ள A என்னும் புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. AD என்னும் பகுதி அச்சுவரைத் தொடுகின்றது அத்

தட்டின் தளம் அச்சுவருக்குச் செங்கோணத்தில் இருக்கின்றது. அத்தட்டைத் தொடாதிருக்கின்ற நாடாப் பகுதியின் நீளம் 2b ஆயின், அந்நாடாவின் இழுவிசையையும். Dயில் உள்ள எதிர்த் தாக்கத்தையும் காண்க.

9. பாரமான சீர் சம நேர் கோல்கள் இரண்டு ஒரு பக்கத்தில் ஓரிழையினால் இணைக்கப்பட்டு, ஒரே கிடைக் கோட்டில் உள்ள இரண்டு மழமழப்பான முளைக்கட்டைகளின் மீது ஒரு கோல் ஒரு முளைக்கட்டைக்கு மேலும், மற்றையது மற்றையதற்கு மேலுமாகக் கிடக்கின்றன. அம்முளைக் கட்டைகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம் ஒவ்வொரு கோலின் நீளத்திற்குச் சமனாயும், அவ்விழையின் நீளம் அத்தூரத்தின் அரைப் பங்காயும் இருக்கின்றது. அக்கோல்கள் அடிவானத்திற்கு θ என்னும் கோணத்திற் சாய்திருந்தால் $8 \cos^3\theta = 1$ எனக் காட்டுக.

10. இலேசான ஒரு முக்கோணச் சட்டம் ABC என்பது ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே, Cஆனது எல்லாவற்றிற்கும்மேலாக இருக்கும்படி, அதே கிடைக் கோட்டிலுள்ள A, B என்னும் இரு தாங்கல்களின் மீது நிற்க, Cயில் இருந்து 7·2 கிலோ கிராம் எடை தொங்கவிடப்படுகின்றது. AB=AC=18 தசம மீட்டரும், BC=5 தசம மீட்டரும் என்றிருந்தால் அத்தாங்கல்களின் எதிர்த் தாக்கங்களைக் காண்க.

11. ஒரு முக்கோணச் சட்டப் படலின் பக்கங்களுடைய நீளங்கள் 26, 40, 42 செ. மீ. அவற்றுள் மிக நீண்ட பக்கம் மழமழப்பான ஒரு கிடை மேஜையின் மீது கிடக்க, எதிர்க் கோணத்திலிருந்து 25·2 கிலோ கிராம் எடையொன்று தொங்கவிடப்படுகின்றது. அம் மேஜையின் மீதுள்ள பக்கத்தின் இழுவிசையைக் காண்க.

12. மூன்று கோல்களாகிய ஒரு முக்கோணம், ஒரு கிடைநிலையிலே நிலையாய் இருக்க, அதன்மீது ஓரினமான கோளமொன்று கிடக்கின்றது. ஒவ்வொரு கோலின்மீதும், உள்ள எதிர்த் தாக்கம் அதன் நீளத்திற்கு விகிதசம மெனக் காட்டுக.

13. 45 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு கதவு, ஒரு நிலைக்குத்துக் கோட்டில் 3அடி இடைத்தூரமுள்ள இரு பிணையல்கள் மீது தாங்கப்படுகின்றது. இந் நிலைக்குத்துக் கோடு, அக்கதவின் புவியீர்ப்பு மையத்திலிருந்து 4 அடி தூரத்திலுள்ளது. அக்கதவின் முழு எடையும் கீழ்ப் பிணையலாலே தாங்கப்படுகின்றதெனக்கொண்டு, ஒவ்வொரு பிணையலிலும் உள்ள எதிர்த் தாக்கங்களின் அளவைக் காண்க.

14. 1 இரு, 2 இரு, 3 இரு; 4 இரு; 5 இரு; 6 இரு என்னும் அளவுடைய 6 விசைகள் ஓர் ஒழுங்கான அறுகோணத்தினுடைய , வரி

சைக்கிரமமாக எடுத்த, பக்கங்கள் வழியே செயல்படுகின்றன· இவற்றின் விளைவு 6 இரு. அளவுள்ள ஒரு தனி விசைக்குச் சமமென்றும், அது 5 இரு. அளவுள்ள விசைக்கு இணையாக, மையத்திலிருந்து அப்பக்கத்தின் தூரத்தைப் போல. $3\frac{1}{2}$ மடங்கு தூரத்தில் செயல்படுகிற தென்றும் காட்டுக.

15. பாரமான ஒரு சீர்க்கோலொன்று தனது நிலையான ஒரு முனை பற்றிக் கட்டின்றித் திரும்பக்கூடியது. இம்முனைக்கு a ஆரையையுடைய ஒரு கோளத்தைத் தாங்குகின்ற ஓரிழை இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அக்கோலின் நீளம் 4a ஆகவும், அவ்விழையின் நீளம் a ஆகவும், கோளம், கோல் இவற்றின் ஒவ்வொன்றின் எடை W ஆகவும் இருந்தால், நிலைக் குத்தோடு, அக்கோலும் இழையும் உண்டாக்கும் சாய்வுகளையும், அவ் விழையின் இழுவிசையையும் காண்க.

16. 6 கிலோ கிராம் எடையும் 1 மீட்டர் நீளமுள்ள AB என்னும் ஒரு சீர்க்கோலொன்று, அதன் முனைகள் DB என்னும் மழமழப்பான தரைமீதும், மழமழப்பான DA என்னும் நிலைக்குத்துச் சுவருக்குக் கெதி ராகவும் இருக்கக் கிடக்கின்றது. அதன்மீது, அதன் கீழ் முனையிலிருந்து 36 செ. மீ. தூரத்திலுள்ள C என்னும் புள்ளி சுவற்றின் அடிப் பாகத் திற்கு DC என்னும் 48 செ. மீ. நீளமுள்ள இழையினால் இணைக்கப்பட்டு, அக்கோல் வழுக்கா வண்ணம் தடுக்கப்பட்டு ஓய்விலிருக்கிறது. இழை யின் இழுவிசையையும், தரை, சுவர் இவற்றின் எதிர்த் தாக்கங்களையும், காண்க.

17. W எடையுள்ள ABCD என்னும் ஒரு சதுரப் பலகை ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்குப் பிணையலால் Aஇல் இணைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அப்பலகையின் தளம் நிலைக்குத்தாய் இருக்கிறது. அது Cயில் W எடையைத் தூக்கிக்கொண்டு, BE என்னும் கிடையான இழையினால் AC கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் தாங்கப்படுகிறது. இழையின் இழு விசையையும் காண்க.

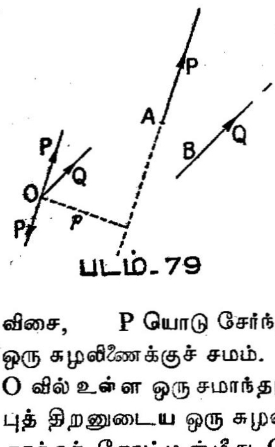
18. 2 இரு. எடையும் 8 அடி நீளமும் உள்ள AB என்னும் ஒரு சீர்க்கோல் தன் ஒருமுனை A பற்றிக் கட்டின்றித் திரும்பக்கூடியது. அது, Bக்குக் கட்டப்பட்ட ஓரிழையினால் கிடையான நிலையில் தாங்கப்படு கிறது. அவ்விழை, கோலின் வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தில் அமைந்து கோலுடன் 45° சாய்ந்துள்ளது. Aஇலிருந்து 6 அடியில் அக் கோலுக்கு 2இரு. எடையுள்ள ஒரு பொருள் கட்டப்பட்டால், இழை யின் இழுவிசையையும், Aஇல் உள்ள எதிர்த் தாக்கத்தின் அளவையும், திசையையும் காண்க.

8 தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒரு தளத்திலே தாக்குகின்ற யாதேனுமொரு விசைத் தொகுதி, அப்பொருளினது, நாம் விரும்பிய யாதேனுமொரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற ஒரு விசையோடு சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்.

P என்பது அத்தொகுதியின் யாதேனுமொரு விசையாகுக. இவ் விசை A என்ற புள்ளியில் தாக்கட்டும். O என்பது விதிக் கட்டின்றி நம் இச்சையாக எடுத்துக் கொள்ளும் ஒரு புள்ளியாகுக.

Oவில் சமனுமெதிருமான இரு விசைகளை ஒவ்வொன்றும் Pஎன்னும் அளவு கொண்டதாக ஏற்படுத்துக. அவற்றினுடைய தாக்கக் கோடுகள் Pயினது திசைக்கு இணையாகுக. இவை அப்பொருள் சமநிலையை மாற்ரு.



படம்-79

p என்பது O வில் இருந்து முந்திய விசை P யினது தாக்கக் கோட்டிற்கு வரைந்த செங்குத்தாயின், A இல் உள்ள விசை P என்பதும், O வில் உள்ள எதிர் இணை விசை P என்பதும் சேர்ந்து P. p என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணையை ஆக்கும்.

எனின், A இல் உள்ள விசை P ஆனது O வில் உள்ள P என்னும் ஒரு சமாந்தர விசை, P யொடு சேர்ந்த P. p என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம். அவ்வாறே, B யில் உள்ள விசை Q ஆனது O வில் உள்ள ஒரு சமாந்தர விசை Q வோடு சேர்ந்த Q. q என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமன். இங்கு q என்பது Q வினது தாக்கக் கோட்டின் மீது O வில் இருந்து வரைந்த செங்குத்தாகும்.

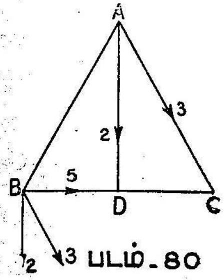
இவ்வாறே, அவ்விசைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு விசைக்கும் செய்யலாம்.

எனின், தரப்பட்ட விசைத் தொகுதி Oவில் தம் முந்திய திசைகளுக்கு இணையாகத் தாக்குகின்ற P, Q, R........ என்னும் விசைகளோடு சேர்ந்த ஒரு தொகைச் சுழலிணைகளுக்குச் சமன்.

இவை, O வில் உள்ள ஒரு தனி விளைவு விசையோடு சேர்ந்த P. p+Q. q+R. r +.........என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு தனிச் சுழலிணைக்குச் சமம்,

9 உதாரணம் 1

ABC என்னும் சமபக்க முக்கோண வடிவுள்ள தகடு ஒன்று ஒரு மழமழப்பான தளத்தில் வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அது BC வழியாக 5 இரு. எடையுள்ள விசையாலும், AC வழியாக 3 இரு. எடையுள்ள விசையாலும், BCக்குச் செங்குத்தான AD வழியாக 2 இரு. எடையுள்ள விசையாலும் தாக்கப்படுகின்றது. அதைச் சமநிலையில் வைக்கத் தேவையான B வழி விசையையும், சுழலிணையையுங் காண்க.



படம்-80

முக்கோணத்தின் பக்கம் 'a' ஆகுக.

AC வழியே செயல்படும் 3 இரு. எடையுள்ள விசை B வழியே அதற்குச் சமனும் இணையுமான ஒரு விசைக்கும் $3\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ திருப்புத் திறனுடைய சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

AD வழியே செயல்படும் 2 இரு எடையுள்ள விசை, B வழியே அதற்குச் சமனும் இணையுமான ஒரு விசைக்கும் $2\dfrac{a}{2}$ திருப்புத் திறனுடைய சுழலிணைக்கும் சமமாகும். B யில் உள்ள விசைகளை BC யின் நீளவாட்டிலும், BC க்குச் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க நாம் பெறுவது

BC யின் வழியே : $5+3\cos 60^\circ = 5+\dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{2}$

BC க்குச் செங்குத்தாக : $2+3\sin 60^\circ = 2+3.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$

இவ் விசைகளின் விளைவு R எனில்,

$$R^2 = \frac{169}{4}+4+\frac{27}{4}+6\sqrt{3} = 53+6\sqrt{3}$$

$$\therefore\ R = 7.962$$

BC க்கு R இன் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = \frac{4+3\sqrt{3}}{13} = .7074$$

$$\therefore\ \theta = 35^\circ\ 16' \text{ (BC க்குக் கீழாக)}$$

$$\text{சுழலிணைகளின் விளைவு} = \left(1+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)a = 3.598\ a$$

B யில் செயல்படும் R என்னும் விசைக்குச் சமனு மெதிருமாயுள்ள ஒரு விசையும், விளைவுச் சுழலிணைக்குச் சமனு மெதிருமாயுள்ள சுழலிணையும் தகட்டை ஓய்வில் வைக்கும்.

பயிற்சி 8·3

1. ABCD என்பது ஒரு சதுரம். AB,BC, DC, DA என்னும் பக்கங்கள் வழியாக 1, 9, 5, 3 என்னும் இரு. எடைக்குச் சமமான விசைகளானவை தாக்குகின்றன. அச்சதுரத்தின் மையத்தின் வழியாகச் செல்கின்ற ஒரு விசையும், ஒரு சுழலிணையும் சேர்ந்து இத் தொகுதிக்குச் சமமாயின், அவற்றைக் காண்க.

2. ABCD என்எது ஒரு சதுரம். DA, AB, BC, CD, DB என்பவற்றின் வழியே P, 3P, 5P, 7P $9\sqrt{2}P$ என்பனவற்றிற்குச் சமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. அத் தொகுதிக்கு ஒருமித்துச் சமமாய் A இன் வழியாகச் செல்கின்ற விசையையும், சுழலிணையையும் காண்க,

3. ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வழியாகச் செயல்படும் மூன்று விசைகள் ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாயின், அவ்விசைகள் அம்முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு விகிதசம மெனக் காட்டுக.

4. $A'B'C'$ என்ற முக்கோணத்தின் பக்கங்களாகிய $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ என்பன முறையே A, B, C என்ற மற்றொரு முக்கோணம் ABC யின் உச்சிகள் வழியே செல்கின்றன, λa, λb, λc என்ற விசைகள் A', B', C' என்ற புள்ளிகள் வழியே முறையே BC, CA, AB க்கு இணையாகச் செயல்படுகின்றன. $A'B'C'$ என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு Δ எனில், அவ்விசைகள் $2\lambda\Delta$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்கு ஒடுங்குமெனக் காட்டுக,

5. ஒரொழுங்கான அறுகோணப் பக்கங்கள் AB, BC CD, DE, EF, FA என்பனவற்றின் வழியே முறையே 1, 2, 3, 4, 5, 6 என்னும் இரு. எடைகளுக்குச் சமமான விசைகள் தாக்குகின்றன. அத்தொகுதிக்கு ஒருமித்துச் சமமாய் A வழியாகச் செல்கின்ற விசையையும், சுழலிணையையும் காண்க.

6. ABCDEF என்பது ஒரொழுங்கான அறுகோணம். அதன் மையம் O ஆகும். 1, 2, 3, 4 5, 6, என்னும் அளவுள்ள விசைகள்

முறையே AB, CB, CD, ED, EF, AF என்ற பக்கங்கள் வழியே எழுத்துக்களின் வரிசையைக் குறிக்கும் முகமாகத் தாக்குகின்றன. இத்தொகுதிக்குச் சமமான Oவில் உள்ள விசையையும் சுழலிணையையும் காண்க. மேலும், இத்தொகுதிக்குச் சமமான தனி விளைவு ABயில் எப்புள்ளி வழியாகப் போகும் எனவும் காண்க.

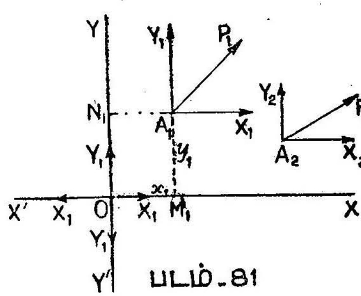
7. 10 கிலோ கிராம் எடைக்குச் சமமான ஒரு விசையும், 20 செ. மீ இடைத் தூரத்தில் ஒவ்வொன்று, 4 கிலோ கிராம் எடைக்குச் சமமாயுள்ள இழுவிசைகளாலாகிய ஒரு சுழலிணையும் நிலைபற்றித் தரப்பட்டால், அவற்றிற்குச் சமனான தனி விசையைக் காண்க.

8. ABCD என்னும் சதுரத்தின் பக்கங்களாகிய AB, BC, CD, DA என்பவற்றின் வழியே முறையே P, 2P, 3P, 4P என்னும் விசைகள் தாக்குகின்றன. அவ்விசைத் தொகுதியை A வழித் தாக்கும் ஒரு விசையாகவும், BC யில் உள்ள ஒரு விசையாகவும் ஒடுக்கவும்.

10. பிரிவு 8 இல் உள்ள தேற்றத்தின் பகுமுறை நிறுவல் (Analytical Proof) தேற்றம்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளின்மீது ஒருதளத்திலே தாக்குகின்ற யாதேனுமொரு விசைத் தொகுதி, அப்பொருளினது, நாம் விரும்பிய யாதேனுமொரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற ஒரு விசையோடு சேர்ந்த ஒரு சுழலிணைக்குச் சமம்.

$P_1, P_2, \ldots\ldots$ என்ற விசைகள் A_1, A_2, என்ற புள்ளிகளில் தாக்கட்டும்.



படம்-81

O என்பது அவ்விசைகளின் தளத்திலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளியாகட்டும்.

Oவை ஆதியாகவும், O வழியே வரையப்பட்ட X′ OX, Y′ OY என்னும் செங்குத்துக் கோடுகளைக் கிடை நிலை அச்சுக்களாகவும் கொள்வோம்.

$A_1, A_2 \ldots\ldots$ என்பனவற்றின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x_1, y_1); (x_2, y_2):......என்பனவாகுக. முதலாவது, A_1 (x_1, y_1) என்னும் புள்ளியில் தாக்கும் P_1 என்னும் விசையைக் கருதுவோம். அதை ஆயங்களுக்கு இணையாக X_1, Y_1 என இரு விசைகளாகப் பிரிக்கவும். Oவில் ஒவ்வொன்றும் X_1 க்குச் சமமான இரு விசைகளை, ஒன்று OX வழியும், மற்றொன்று OX′ வழியும் தாக்கும் வண்ணம் ஏற்படுத்துக.

இவை சமனு மெதிருமாயிருப்பதால், அப்பொருளின் சமநிலையில் எவ்வித விளைவும் ஏற்படுத்தமாட்டா.

இப்பொழுது A_1 இல் தாக்கும் X_1 என்ற விசையும், Oவில் OX' வழியே தாக்கும் X_1 என்ற விசையும் ஒரு சுழலிணையாகும். இதன் திருப்புத் திறன்—$X_1 A_1 M_1$ (அல்லது)—$X_1 \ y_1$ (இச்சுழலிணை அப் பொருளை வலஞ் சுழியாகத் திருப்பும் வன்மையுடையதால், இது, குறைக் குறியுடன் கொள்ளப்பட்டது).

எனவே, A_1 இல் உள்ள X_1 என்ற விசையானது, Oவில் OX வழியே செயல்படும் X_1 என்ற விசைக்கும், அத்துடன்—$X_1 \ y_1$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம்.

இதே போல் Oவில் OY, OY' வழியாகச் சமமான Y_1 விசை ஏற்படுத்தினால், A_1 இல் உள்ள Y_1 என்ற விசையானது, Oவில் OY வழியாகச் செயல்படும் Y_1 என்ற விசைக்கும், அத்துடன் $Y_1 A_1 N_1$ (அ-து) $Y_1 \ x_1$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

ஆகவே, A_1 இல் செயல்படும் P_1 என்ற விசையானது Oவில் முறையே OX, OY என்னும் ஆயங்கள் வழியே செயல்படும் X_1, Y_1 என்ற விசைகளுக்கும் அத்துடன் $Y_1 \ x_1 - X_1 \ y_1$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

இதேபோல $A_2(x_2 \ y_2)$ இல் செயல்படும் P_2 என்னும் விசையானது OX, OY வழியே செயல்படும் $X_2 \ Y_2$ என்ற விசைகளுக்கும், அத்துடன் $Y_2 \ x_2 - X_2 \ y_2$ என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

இவ்வாறே, அவ்விசைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு விசையையும், OX, QY வழியே செயல்படும் விசைகளாகவும், அத்துடன் கூடிய சுழலிணையாகவும் அமைக்கலாம்.

ஆகவே, அவ்விசைத் தொகுதியானது

OX வழியே $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots = WX_1 = X$ என்ற விசைக்கும்

OY வழியே $Y_1 + Y_2 + Y_3 \ldots = \lessgtr Y_1 = Y$ என்ற விசைக்கும்,

அத்துடன் மேற்குறிப்பிட்ட சுழலிணைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையைத் திருப்புத் திறனுகவுடைய $G = \lessgtr (Y_1 \ x_1 - X_1 \ y_1)$ என்னும் ஒரு விளைவுச் சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

X, Y என்ற விசைகளை O வழியாகச் செல்லும் R என்னும் ஒரு தனி விசையாகச் சேர்த்தால்,

$R^2 = X^2 + Y^2$ (1) என்றாகும்.

மேலும், இவ் விளைவு விசை X ஆயத்துடன் θ என்னும் கோணம் உண்டாக்கினால்,

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} \quad (2)$$

ஆகவே, கொடுத்த விசைத் தொகுதியை O வழியாகச் செல்லும் R என்னும் தனி விசையாகவும், அத்துடன் திருப்புத் திறன் G ஆக உடைய ஒரு சுழலிணையாகவும் ஒடுக்கலாம்.

இங்கு $G = \Sigma (Y_1 x_1 - X_1 y_1)$ (3)

R, θ என்பனவற்றின் மதிப்புகள் O வின் நிலையைச் சார்ந்தனவாக இல்லை என்பது தெளிவு; ஏனெனில், அவற்றின் மதிப்பில் A_1, A_2 என்பனவற்றின் ஆயத் தொலைகள் இடம் பெறவில்லை.

ஆனால், G யின் மதிப்பு O வின் நிலையைச் சார்ந்ததாய் இருக்குமென்பது தெளிவு.

ஒரு தள விசைத் தொகுதியின் சமநிலை நிபந்தனைகள் :

அவ்விசைத் தொகுதி யாதேனும் ஒரு புள்ளி O வில் செயல்படும் விளைவு விசை R உடன் சேர்ந்து ஒரு சுழலிணை G க்கு ஒடுங்கட்டும்.

இப்பொழுது, அதிகாரம் 6, பிரிவு 7இன் படி, ஒரு தனி விசையும் ஒரு சுழலிணையும் சேர்ந்து, ஒவ்வொன்றும் தனித்தனியே பூச்சியமானாலன்றி, சமநிலை யடையா.

ஆகவே, $R = O$; $G = O$ ஆக வேண்டும்.

$R = O$ எனின் அதன் பிரித்த பகுதிகள் $X = O$, $Y = O$ ஆதல் வேண்டும்.

அதாவது, கொடுத்த விசைத் தொகுதியின் இரு திசைகளின் பிரித்த பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகை தனித்தனிப் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

அன்றியும், நம் விருப்பப்படி எடுக்கும் O என்ற எப்புள்ளியாயினும், அவ்விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை அப்புள்ளி பற்றிப் பூச்சியமாதல்வேண்டும். ஆகவே, இவ்வதிகாரம், பிரிவு 5 இல் கூறிய சமநிலை நிபந்தனைகளைப் பெறுகிறோம்.

வேறொரு புள்ளி பற்றித் தனி விசையையும், சுழலிணையையும் காணல்

கொடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதியை வேறொரு புள்ளி $O'(x', y')$ வழிச்செல்லும் தனிவிசையாகவும், அத்துடன் சேர்ந்த சுழலிணையாகவும் பெறவேண்டின், தனி விசை R இன் மதிப்பு மாறாது என்பதைக் கவனிக்க வேண்டும். ஆனால், சுழலிணையானது O' இன் நிலையைச் சார்ந்திருப்பதால், அதை G' எனக் குறிக்கலாம். G' ஐப் பின் வருமாறு பெறலாம்.

(x', y') என்ற புள்ளி பற்றி விசை P_1 இன் திருப்புத் திறன்

$$=Y_1(x_1-x')-X_1(y_1-y')$$
$$=(Y_1\, x_1-X_1\, y_1)-Y_1\, x'+x_1\, y'$$

இதே போல், விசை P_2 இன் திருப்புத் திறன்

$$=(Y_2\, x_2-x_2\, y_2)-Y_2\, x'+x_2\, y'$$

இவ்வாறே, இவ்விசைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு விசைக்கும் $O'(x', y')$ பற்றித் திருப்புத் திறன் காணலாம்:

ஆகவே, O' பற்றி மொத்த திருப்புத் திறன்

$$G'=\sum(Y_1\, x_1-X_1\, y_1)-x'\sum Y_1+y'\sum X_1$$
$$=G-x'\,Y+y'X$$

விளைவின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

கொடுத்த விசைத் தொகுதி சமநிலையில் இல்லாவிடில், அது (x', y') என்னும் புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு தனி விசை R ஆகவும், அத்துடன் சேர்ந்த G' என்னும் சுழலிணையாகவும் ஒடுங்கும்.

இங்கு, $R^2=X^2+Y^2$

$$G'=G-x'Y+y'X$$

R பூச்சியமல்லாவிடில், $O'(x', y')$ ஐத் தகுந்தாற் போல் தேர்ந்தெடுத்து G' பூச்சியமாகும்படி செய்து, ஒரு தனி விசையைப் பெறலாம்.

ஆகவே, ஒரு தனி விசையைப் பெற (x', y') இன் எந்த மதிப்புக்கும் $G'=O$ ஆகவேண்டும்.

ஆகவே, $(x' \ y')$ என்பன $G-x'Y+y'X=O$ என்னும் சம்பந்தத்தை நிறை வேற்ற வேண்டும்.

$\therefore$ (x', y') இன் நியமப்பாதை $G-xY+yX=O$ ஆகும்.

ஆனல், R என்ற தனி விசை (x', y') வழிச் செல்வதால்,

$\therefore$ (x', y') இன் நியமப் பாதை R இன் தாக்கக் கோடாகும்.

எனவே, R இன் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$G-xY+yX=O$ ஆகும்.

விளைவின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு : வேறொரு வழி

இப்பிரிவில் $P_1, P_2, \ldots\ldots$ என்னும் விசைத் தொகுதி ஒரு தனி விசை R ஆகவும், அத்துடன் சேர்ந்த திருப்புத் திறன் $G=\sum(Y_1x_1-X_1y_1)$ ஆகவுடைய ஒரு சுழலிணைக்கும் ஒடுங்கு மெனக் கண்டோம்.

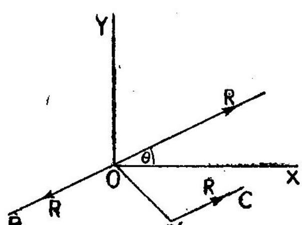
மேலும், அத்தொகுதி ஒரு தனி விசை யாகவோ அல்லது ஒரு தனிச் சுழலிணை யாகவோ ஒடுக்கப்படக் கூடும் என்றும் காட்டலாம்.

ஏனெனில், $R=O$ எனில், விசைகள் ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்கும் (i)

$G=O$ எனில், விசைகள் ஒரு தனி விசையாக ஒடுங்கும் (ii)

$R\neq O$; $O\neq$ எனில், அத்தொகுதி ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்கு மெனக் காட்டலாம்.

இப்பொழுது, அதிகாரம் 6, பிரிவு 7 இல் காட்டியபடி R என்ற ஒரு தனி விசையும், G என்ற ஒரு சுழலிணையும் சேர்ந்து சமநிலையை ஆக்கத் தக்கன வல்ல ஆனல், அவை முந்திய R இன் திசைக்குச் சமாந்தரமான திசையிலே, வேறொரு கோட்டிலே தாக்குகின்ற R என்ற தனி விசைக்குச் சமம்.



படம். 82

இதை நிறுவ, G என்ற சுழலிணையை, ஒவ்வொன்றும் R அளவுள்ள இரு சமனு மெதிருமான விசைகளைக் கொண்டு ஒன்று Rஇன் திசைக்கு நேரெதிராக OB வழியாகவும், மற்றொன்று O′ C வழியாகவும் செயல்படும் சுழலிணையால் மாற்றீடு செய்க. இங்கு O′ என்பது Gயின் குறியிற் கேற்ப OBக்கு வலமாகவோ இடமாகவோ அமைந்து, OO′ என்பது OB யிற்குச் செங்குத்தாக விருக்கும். மேலும், இச்சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் Gயிற்குச் சமனுதலால்,

$$OO' \times R = G \quad (i)$$

(அல்லது) $OO' = \frac{G}{R} \qquad \frac{\leqslant(Y_1\ x_1 - X_1\ y_1)}{\sqrt{X^2+Y^2}}$

O வில் தாக்கும் விசைகள் ஒன்றை யொன்று சமப்படுத்திக் கொள்கின்றன ஆகவே, நமக்கு மிஞ்சியது O′ இல் O′ C வழியாகச் செயல்படும். R என்னும் விசையாகும்.

$\tan\theta = \frac{Y}{x}$ என்பதால்,

நாம் பெறுவது, $\sin\theta = \frac{Y}{R}$; $\cos\theta = \frac{X}{R}$ (2)

இப்பொழுது, OO′ என்பது OX உடன் $(270^\circ + \theta)$ என்னும் கோணம் உண்டாக்குகின்றது.

ஆகவே, O′ Cயின் சமன்பாடு.

$$x \cos(270^\circ + \theta) + y \sin(270^\circ + \theta) = OO'$$

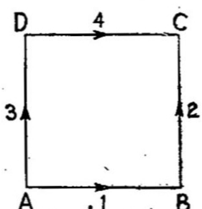
(அ-து) $x \sin\theta - y \cos\theta = \frac{G}{R}$

(அ-து) $x\frac{Y}{R} - y.\frac{X}{R} = \frac{G}{R}$

(அ-து) $x\,Y - y\,X = G$ (3)

11. உதாரணம்

1, 2, 3, 4 என்பவற்றிற்கு விகித சமமான அளவுகளுடைய விசைகள் தன்பக்கம் 20 செ. மீ. நீளமுள்ள ABCD என்னும் சதுரத்தின் பக்கங்களாகிய AB, BC, AD, DC என்பவற்றின் வழியே செயல்படுகின்றன. அவற்றின் விளைவையும், அதன் தாக்கக்கோட்டையும் காண்க.



படம்-83

AB, AD என்பவற்றை முறையே x, y ஆயங்களாகக் கொள்க.

இப்பொழுது, $X = 4 + 1 = 5$

$Y = 3 + 2 \quad 5$

∴ விளைவு $R = \sqrt{X^2+Y^2} = 5\sqrt{2}$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore\ \theta = 45^\circ$$

ஆகவே, விளைவு ABயுடன் 45° சாய்ந்து செயல் படுகிறது.

அன்றியும், விசைகளின் திருப்புத் திறன்களை A பற்றி எடுத்தால்,

$G = 2\cdot2 - 4\cdot2 = -4$

ஆகவே, விளைவின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$xy - YX = G$ என்பதாகும்.

(அ-து) $x\cdot5 - y\cdot5 = -4$

(அ-து) $5x - 5y + 4 = 0$

பயிற்சி 8·4

1. P, Q, R என்ற மூன்று விசைகள் $x+y=1$, $y-x=1$, $y=2$ என்னும் கோடுகளாலாகிய முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வழியே செயல் படுகின்றன. அவற்றின் விளைவின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. ABCD என்னும் செவ்வகத்தில் AB=15 செ. மீ; AD=8 செ. மீ; DA, AB, DB, AC, CB, CD வழியே முறையே 22 கிராம், 10 கிராம், 51 கிராம், 34 கிராம், 40 கிராம், 15 கிராம் எடையுள்ள விசைகள் தாக்குகின்றன. AB, AD என்பனவற்றை முறையே x, y ஆயங்களாகக் கொண்டு இவ்விசைத் தொகுதியின் விளைவின் தாக்கக்கோடு $x+y=12$ எனக் காட்டுக.

3. xy தளத்தில் செயல்படும் ஒரு விசை (O, O); (8, O); (O, 10) என்னும் புள்ளிகள் பற்றி −60 செ மீ. கிராம், −156 செ. மீ. கிராம் 84 செ. மீ கிராம் என்னும் திருப்புத் திறன்களைக் கொண்டுள்ளது. ஆயத் தொலைகள் செ. மீ. அளப்பதாகக்கொண்டு, விசையின் அளவையும், அது ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகளையும் காண்க.

4. ஒரு தளத்திலுள்ள ஒரு விசைத்தொகுதி G திருப்புத் திற னுடைய ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்குகிறது. மேலும், ஒவ்வொரு விசையும் அது தாக்கும் புள்ளி பற்றி ஒரு செங்கோண மளவு திருப்பப்பட்டால், அவ் விசைத் தொகுதி H திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணையாக ஒடுங்கு கிறது. ஒவ்வொரு விசையும் α கோண மளவு திருப்பப்பட்டால், அவ் அவ்விசைத் தொகுதி $G\cos\alpha + H\sin\alpha$ என்னும் திருப்புத் திற னுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமமாகு மெனக் காட்டுக.

12 கட்டுப்படுத்தப்பட்ட பொருள் (Constrained body)

ஒரு பொருளினுடைய ஒன்று அல்லது ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட புள்ளிகள் நிலையானவையாயிருந்தால், அப்பொருள் கட்டுப்படுத்தப்பட்ட பொருள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, ஒரு பிணையலால் ஒரு சுவரிலே இணைக்கப்பட்ட ஒரு கோலுக்கு ,ஒரு புள்ளி நிலையானதால் அது, கட்டுப்படுத்தப்பட்ட பொருளாகும்.

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளுக்கு, A, B என்னும் இரு அசையாத புள்ளிகள் உண்டெனின், AB என்னும் கோட்டிலுள்ள அப்பொருளினுடைய எல்லாப் புள்ளிகளும் நிலையானவை. அப்பொருள் இயங்கக் கூடிய ஒரே வழி AB யை அச்சாகக் கொண்டு சுற்றித் திரும்புதலாலே ஏற்படும். உதாரணமாக, ஒரு கதவை எடுத்துக்கொள்வோம். இது தனது கீலைப் பற்றியே திரும்பக்கூடும்.

ஒரு பொருளுக்கு மூன்று புள்ளிகள் நிலையானவை எனில், அம் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்கோட்டில் அமையாவிடில், அப்பொருள் இயங்கக்கூடியதன்று என்பது தெளிவு.

13. தேற்றம்

ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளுக்கு ஒரு புள்ளி நிலையாக இருக்க, அப்பொருள் அப்புள்ளி வழிச் செல்கின்ற ஒரு தளத்திலேயுள்ள ஒரு விசைத் தொகுதியினாலே தாக்கப்படும்போது, அந்நிலையான புள்ளி பற்றி எடுக்கின்ற விசைகளுடைய குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாயின், அப்பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்.

ஒரு பொருளுக்கு (இவ்வதிகாரம், பிரிவு 7 உம் 3 ஐப் போலே) ஒரு புள்ளி A நிலையாய் இருக்கும்போது, அப்புள்ளியில் யாதேனுமொரு கட்டுப்படுத்தும் F என்னும் விசை உளுற்றப்பட்டு, அது, தரப்பட்ட விசைத் தொகுதியோடு சேர்ந்து சமநிலையில் இருக்கும் எனின், இவ்வதிகாரம், பிரிவு 5இல் உள்ள சமநிலை நிபந்தனைகள் பொருந்தும்.

செங்கோணத்திலுள்ள இரு திசைகளின் நீளத்திற்குப் பிரித்தால், F என்னும் விசையினுடைய அளவு, திசைகளைத் துணிதற்கு இரு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்,

எல்லா விசைகளுக்கும் A பற்றித் திருப்புத் திறன்கள் எடுத்தால், விசை F என்பது A வழிச் செல்கின்றமையால், நம் சமன்பாட்டில் இடம் பெறுது.

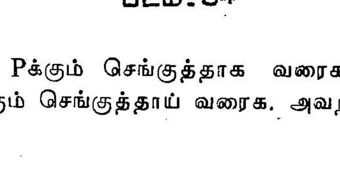
எனின், பிரிவு 5இல் உள்ள திருப்புத் திறன்களின் சமன்பாடு A பற்றி எடுக்கின்ற, கொடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதியினுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகு மென்பதை உணர்த்தும் ஒரு சமன்பாடாகும்.

ஆகவே, அப்பொருளின் சமநிலைக்கு (கட்டுப்படுத்தும் விசை F ஐக் காண விரும்பினாலன்றி) அந்நிலையான புள்ளி A பற்றி கொடுக்கப்பட்ட விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும் என்ற ஒன்றையே கூறல் வேண்டும்.

14. ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளுக்கு ஓரச்சு நிலையாயிருக்க, அப்பொருள் இவ்வச்சிற்குச் செங்குத்தாகிய திசைகளிலேயுள்ள விசைகளாலே தாக்கப்படும் பொழுது, அந்நிலையான அச்சுப்பற்றி எடுக்கும் விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமானால், அப்பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்.

[குறிப்பு : ஒருவிசை கொடுக்கப்பட்ட ஓரச்சுக்குச் செங்குத்தாயிருந்து அதனைச் சந்திக்காதிருந்தால், அவ்வச்சு பற்றி அதனுடைய திருப்புத் திறன், அவ்விசையை அவ்வச்சுக்கும், விசைக்கும் இடையிலுள்ள செங்குத்துத் தூரத்தால் பெருக்க வரும் பலனாகும்.]

AB என்பது அப்பொருளிலுள்ள நிலை அச்சாகுக. அப்பொருள் P, Q,... என்னும் விசைகளாலே தாக்கப்படுக. இவ்விசைகள் இணையாக இருக்கத் தேவையில்லை. ஆனால், அவற்றினுடைய திசைகள், அவ்வச்சுக்குச் செங்குத்தாய் இருத்தல் வேண்டும்.



படம்-84

CC′ என்பதை அவ்வச்சிற்கும், Pக்கும் செங்குத்தாக வரைக DD′ என்பதை அவ்வச்சிற்கும் Qவிற்கும் செங்குத்தாய் வரைக. அவற்றின் நீளங்கள் p, q, என்பனவாகுக.

C′ என்ற புள்ளியில் ஒவ்வொன்றும் Pயிற்குச் சமனாய், இரண்டு சமனு மெதிருமாயுள்ள விசைகளை Pயிற்குச் சமாந்தரமாக ஏற்படுத்துக.

இவற்றினால், அப்பொருளின் நிலையில், மாற்றம் ஏதும் ஏற்படாது.

இப்பொழுது, Cயில் உள்ள P என்னும் விசை, C′ இல் உள்ள P என்ற விசைக்கும், அத்துடன் P.p என்ற திருப்புத் திறனுடைய சுழலிணைக்கும் சமமாகும்.

அதுபோல, Dயில் உள்ள Qஎன்னும் விசை, D′ இல் உள்ள Q என்னும் ஒரு விசைக்கும் அத்துடன் Q. q என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்கும் சமம்.

இதுபோலவே, ஏனைய விசைகளுக்கும் ஆகும்.

இனி, C′ இல் உள்ள P என்ற விசை, D′ இல் உள்ள Q என்ற விசை என்பன அச்சை வெட்டுதலால், அவ்வச்சு பற்றி அப்பொருளைத் திருப்புதலில், அவ்விசைகளுக்கு விளைவு யாதும் இருத்தல் முடியாது. ஆகவே, அவை அவ்வச்சைக் கட்டுப்படுத்தும் விசைகளாலே சமப்படுத்தப்படும்.

அதிகாரம் 6, பிரிவு 5, 6 என்பனவற்றின்படி அச்சுழலிணைகள் அவ்வச்சிற்குச் செங்குத்தான தளத்தில் P.p+Q.q+R.r+.........என்னும் திருப்புத் திறனுடைய ஒரு சுழலிணைக்குச் சமன்.

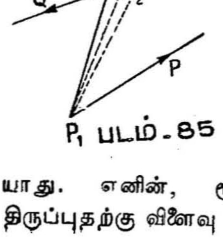
ஆகவே, P.p+Q.q+R,r+........என்பது பூச்சியமாயின், அப்பொருள் சமநிலையில் இருக்கும்.

ஆனால், இக்கோவை அவ்வச்சுப் பற்றி விசைகளுடைய திருப்புத் றன்களின் குறியியல் கூட்டுத் தொகையாகும்.

எனின், தேற்றம் நிறுவப்பட்டது.

15. தேற்றம்

ஒரு பொருளின் மீது தாக்குகின்ற மூன்று விசைகள் அதனைச் சமநிலையில் வைத்திருக்குமாயின், அவை ஒரு தளத்தில் கிடத்தல் வேண்டும்.



படம்-85

அம்மூன்று விசைகளும் P, Q, R ஆகுக. P_1, Q_1 என்பன முறையே P, Q என்பனவற்றினுடைய தாக்கக் கோடுகளிலுள்ள எவையேனும் இரு புள்ளிகளாகுக.

அவ்விசைகள் சமநிலையில் இருப்பதால், அவற்றிற்கு ஒருமித்து அப்பொருளை $P_1 Q_1$ என்னும் கோடுபற்றித் திருப்புதற்கு முடியாது. ஆனால், P, Q என்னும் விசைகள் இக்கோட்டைச் சந்திக்கின்றன. ஆகவே, அவற்றிற்கு அப்பொருளை $P_1 Q_1$ என்னும் கோடு பற்றித் திருப்புதற்கு விளைவு யாதும் தனித்தனிக் கிடையாது. எனின், மூன்றும் விசைக்கும் $P_1 Q_1$ என்பது பற்றித் திருப்புதற்கு விளைவு யாதும் இருத்தல்முடியாது.

ஆகவே $P_1 Q_1$ என்னும் கோடு R என்பதைச் சந்தித்தல் வேண்டும்.

இதுபோல, Q_1, Q_2, என்பன Q வினது தாக்கக் கோட்டிலுள்ள பிற புள்ளிகளாயின், கோடுகள் $P_1 Q_2$, $P_1 Q_3$,........என்பன R ஐச் சந்தித்தல் வேண்டும்.

எனின், R ஆனது P_1 மூலமாக Q வினது தாக்கக் கோட்டின் ஊடாகச் செல்லும் தளத்தில் கிடத்தல் வேண்டும். அதாவது, Q, R என பனவற்றின் தாக்கக்கோடுகள் P_1 க்கு ஊடாகச் செல்லும் ஒரு தளத் கிடத்தல் வேண்டும்.

ஆனல் P_1 என்பது P யினது தாக்கக் கோட்டிலுள்ள யாதேனு மொரு புள்ளி.

எனின், மேலுள்ள தளம் P யினது தாக்கக் கோட்டிலுள்ள யாதேனு மொரு புள்ளிக்கு ஊடாகச்செல்லும். ஆகவே, P யில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வழியும் செல்லும்.

அதாவது, அத்தளம் P யினது தாக்கக் கோட்டையும் கொள்ளும்.

கி. தே.

அதிகாரம் 7, பிரிவு 1லிருந்து, அம் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்கவேண்டும் அல்லது சமாந்தரமாக இருக்கவேண்டும் என்பது பெறப்படுகின்றது.

16. உதாரணம் 1.

AB என்னும் கோலுக்கு A என்னும் ஒரு முனை நிலையாயுள்ளது. அது, தனக்கு 30°இற் சாய்ந்த ஒரு திசையிலே, Bயிலே தாக்குகின்ற 5 கிலோ கிராம் எடைக்குச் சமனுன ஒரு விசையால் கிடைநிலையில் வைக் கப்படுகின்றது. அக்கோல் 1 மீட்டர் நீளமுள்ளதாகவும், ஓரினமான தாகவுமிருந்தால், அதன் எடையைக் காண்க.

A பற்றி எடுக்கும் அக்கோலின் எடையினது திருப்புத் திறன், A பற்றி எடுக்கும் அவ்விசையினது திருப்புத் திறனுக்குச் சமனுதல் வேண்டும்.

W அக்கோலின் எடையாயின்

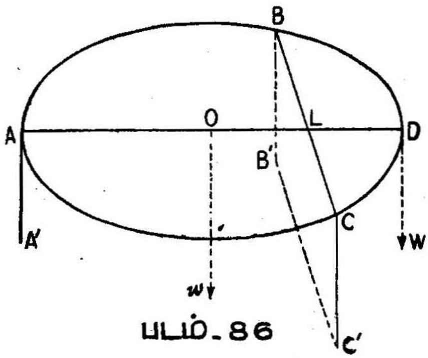
$$W \times \tfrac{1}{2} = 5 \times 1 \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{5}{2}$$

$\therefore$ W = 5 கிலோ கிராம் எடை

உதாரணம் 2

ஒரு வட்டமேசை, தன் விளிம்பிலுள்ள மூன்று சமதூரமான எடையில்லாக் கால்களிலே நிற்கிறது. ஒரு பையன், அதன் ஒரு காலுக்கெதிராக அதன் விளிம்பின்மீது உட்காரவே, அது சரியாகக் கவிழும் நிலை அடைந்து, அதன் விளிம்பின் மீது இரு கால்களின் மீதும் விழுகின்றது. பின், அவன் அதன் மிக வுயர்ந்த புள்ளியில் உட்கார்ந்து, மறுபடியும் அதனை மட்டாக நிமிரச் செய்கிறான். அம் மேசையின் ஆரை, ஒரு காலினது நீளத்தின் $\sqrt{2}$ மடங்கெனக் காட்டுக.



படம்-86

வட்டமேசையின் மையத்தை O எனவும், அதன் கால்களை AA′, BB′, CC′ என்றும் குறிப்போம்;

ABC என்பது சமபக்க முக்கோணமாகும்.

AO என்பது BC ஐ L என்னும் புள்ளியிலும், மறுபடியும் வட்டத்தை Dயிலும் சந்திக்கட்டும். மேசையின் எடையை ω என்றும், பையனின் எடையை W என்றும் குறிப்போம். பையன் Dயில் உட்கார்ந்து, மேசை B′C′ பற்றிக் கவிழுந் தருணத்தில்,

B′C′ பற்றி ωவின் திருப்புத் திறன் = B′C′ பற்றி Wவின் திருப்புத் திறன்,

$$\therefore \omega . OL = W . LD$$

வட்டத்தின் ஆரை 'a' எனில்,

$$OL = OB \cos \angle BOL = OB \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\therefore \omega . \frac{a}{2} = W \cdot \left(a - \frac{a}{2}\right)$$

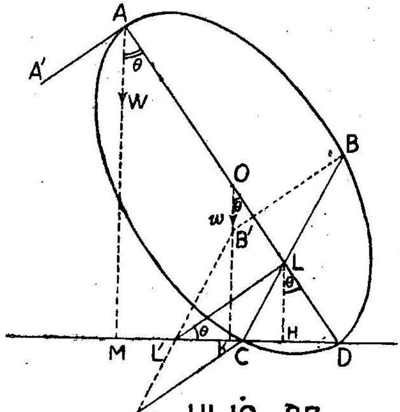
$$= W \cdot \frac{a}{2}$$

$$\therefore \omega = W \quad (i)$$

இரண்டாவது படம், மேசை கவிழ்ந்திருக்கும்போது வரையப்பட்டது.

L வழியாக BB′ CC′ என்பனவற்றிற்கு இணையாக LL′ என்பதை வரைக.

இது, B′C′ ஐ L′இல் சந்திக்கட்டும். D வழியாக ஒரு கிடைக் கோடு வரைக. இது L′ வழியாகச் செல்லும் A, O, L என்னும் புள்ளிகள்வழி வரையும் நிலைக்குத்துக் கோடுகள் D வழி வரையும் கிடைக் கோட்டை முறையே M, K, H என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.



படம் - 87

$\angle DAM = \theta$ எனக் கொள்க.

ஆயின் $\angle L' = \theta$; $\angle D = 90° - \theta$

மேசையின், காலின் நீளம் l எனக் கொள்வோம். இப்பொழுது, பையன் Aயில் உட்கார்ந்து மேசையை B′C′ பற்றித் திருப்பச் செய்து நிமிர்த்துகிறன்.

ஆகையால், B′C′ பற்றி Aவழியாக நிலைக்குத்தாகச் செயல்படும் W வின் திருப்புத் திறன் = B′C′ பற்றி Oவில் தாக்கும் ω வின் திருப்புத் திறன்.

(அ-து) $W.\ ML' = W.\ L'K$

ஆனல், $W = \omega$

$\therefore\ ML' = L'K$

(அ-து) $MK - L'K = L'K$

$\therefore\ MK = 2\ L'K$

$= 2\ (L'H - KH)$

(அ-து) $a \sin\theta = 2\left(l\cos\theta - \frac{a}{2}\sin\theta\right)$

$\therefore\ 2\ a \sin\theta = 2\ l\cos\theta$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{l}{a}$$

ஆனால், $\triangle L'LD$ யிலிருந்து,

$$\tan\theta = \frac{LD}{LL^1} = \frac{a/2}{l} = \frac{a}{2l}$$

$$\therefore \frac{l}{a} = \frac{a}{2l}$$

$$\therefore a^2 = 2l^2$$

$$\therefore \frac{a}{l} = \frac{\sqrt{2}}{}$$

பயிற்சி 8.5

1. சதுரவடிவான ஒரு சீர்த்தட்டொன்று, தன்னுடைய முனைகளுள் ஒன்றிலே தொங்கவிடப்படுகின்றது. அத்தட்டின் எடைக்கு அரைப் பங்குக்குச் சமனான ஒரு எடை, சதுரத்தின் அடுத்துள்ள முனையிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. அத்தட்டு, சமநிலை அடையும் நிலையைக் காண்க.

2. 32 a நீளமுள்ள சீர்க்கோலொன்று, a ஆரையுள்ள ஒரு மழ மழப்பான உருளை வடிவான கோப்பையில் உள்ளாக ஒரு பகுதியும், வெளியாக ஒரு பகுதியுமாகக் கிடக்கின்றது. சமநிலை நிலையில் கோலானது அடிவானத்துடன் 60° சாய்ந்திருக்குமென்றும், உருளையின் எடை கோலின் எடையைப் போல் குறைந்தபடி 6 மடங்கு இல்லாவிடில் அது, கவிழு மென்றும் காட்டுக.

3. 8 செ. மீ. உயரமும், 6 செ. மீ. விட்டத்தையும் கொண்ட ஒரு உருளைப் பாத்திரம், ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீது நிற்கிறது. 18 செ. மீ. நீளமுள்ள, ஒரு மழமழப்பான சீர்க்கோலொன்று அதன் விளிம்பிற் கெதிராய்க் கிடக்குமாறு அதற்குள் வைக்கப்படுகின்றது. அக்கோலினது நிறை 250 கிராம் எனின், அக்கோலிற்கும், பாத்திரத்திற்கும் இடையே யுள்ள தாக்கங்களைக் காண்க.

4. மேற்புறம் திறந்த ஒருருளையின் நீளம் a ஆகவும், அடியின் விட்டம் b ஆகவுமுள்ளது. அது ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீது கிடக்க, ஒரு சீர்க்கோலொன்று, அவ்வுருளைக்குள்ளே ஒருபகுதி அதனோடு மேல் விளிம்பிலும், கீழ்விளிம்பிலும் தொட்டுக்கொண்டு இருக்குமாறு கிடக்கின்றது அவ்வுருளையின் எடை, அக்கோலினது எடையின் n மடங்கெனக்

கொண்டு அவ்வுருளை விழத் தொடங்கும் கணத்தில் அக்கோலினது நீளத்தைக் காண்க.

5. 36 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு சீர் வட்ட மேசை யொன்று தன் விளிம்பைச் சுற்றிச் சமசீரில் வைத்த நான்கு சமகால்களின்மீது கிடக்கின்றது. அம்மேசையின் விளிம்பின்மீது என்ன எடையை மிகக் குறைவாக வைத்தால், அது அம்மேசையை மட்டாகக் கவிழ்க்குமெனக் காண்க.

6. வட்ட வடிவான மேசையொன்று 12 கிலோ கிராம் எடையுள்ளது. அதற்குப் பரிதியிலே ஒன்றுக்கொன்று சமதூரமான மூன்று புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட மூன்று நிலைக்குத்துக் கால்கள் உண்டு. அம்மேசை விளிம்பிலுள்ள யாதேனு மொரு புள்ளியில், எந்த மிகக் குறைந்த எடையை வைத்தால், அதனைச் சரியாய்க் கவிழக்குமெனக் காண்க.

7. C யில் விரிகோணமுள்ள ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத் தகடு, தன் பக்கம் AC யானது ஒரு மேசையைத் தொட்டுக்கொண்டு நிற்கிறது. W என்பது அம்முக்கோணத்தின் எடையாயின், B யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு, அம்முக்கோணத்தைக்கவிழ்க்கக்கூடிய மிகச் சிறிய

எடை $=\frac{1}{3}W\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ எனக் காட்டுக.

$c^2>a^2+3b^2$ எனின், மேலுள்ளதை விளக்குக.

8. ஒரு சதுர மேசை, தன்னுடைய பக்கங்களின் மையங்களில் முறையே வைக்கப்பட்ட நான்கு கால்களிலே நிற்கிறது. அதனுடைய மூலைகளுள் ஒன்றில், அதனைக் கவிழ்க்காது வைக்கத் தக்க மிகப் பெரிய எடையைக் காண்க.

9. நாலு கால் சதுர மேசை யொன்று ஒரு காலை இழந்துவிட்டது. அம்மேசையினது எடைக்குச் சமனுன ஒரு எடையை, அம்மேசையில் எவ்விடத்தில் வைத்தால், அம்மேசையினுடைய மீந்திருக்கும் கால்களின் மீதுள்ள அழுத்தங்கள் சமமாகும்?

10. 10 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு சதுர மேசைக்கு அதனுடைய பக்க மையங்களில் கால்கள் இருக்கின்றன. ஒவ்வொன்றும் அம்மேசையினது எடைக்குச் சமமான மூன்று சம எடைகள் அக்கோணப் புள்ளிகளுள் மூன்றில் வைக்கப்படுகின்றன. சமநிலை காக்க, நாலாவது கோணப் புள்ளியில் வைக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய எடை என்ன?

11. W எடையும், r ஆரையும் உடைய ஒரு பாரமான வண்டிச் சக்கரமானது தன் மையத்தில் பிரயோகிக்கப்பட்ட F என்னும் ஒரு கிடை விசையினுல் h என்னும் உயரமுடைய ஒரு தடைக்கு மேலாக இழுக்கப்படவேண்டும். இதற்கு, F ஆனது $W\frac{\sqrt{2rh-h^2}}{r-h}$ என்பதிலும் சற்றுப் பெரிதாக வேண்டுமெனக் காட்டுக.

12. ஒரே சீரான தடிப்பும், ω என்னும் எடையும் உடைய வட்ட உலோகத் தட்டொன்று, தன் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. அதன் விளிம்பிற் சுற்றிய ஓரிழை p என்னுமொரு எடையைத் தாங்குகிறது, அத்தகடு தொங்கவிடப்பட்டுள்ள புள்ளி வழிச் செல்கின்ற விட்டம் நிலைக்குத்தோடு $\sin^{-1}\frac{p}{p+\omega}$ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்குகிறதெனக் காட்டுக.

13. பாரமான கிடை வட்ட வளையமொன்று தன் பரிதியிலுள்ள A, B, C என்னும் புள்ளிகளிலே மூன்று தாங்கிகளின்மீது கிடக்கின்றது. அதன் எடையும், முக்கோணம் ABC யினுடைய பக்கங்களும், கோணங்களும் தரப்பட்டால், அத்தாங்கிகளின் எதிர்த் தாக்கங்களைக் காண்க.

14. W எடையுடைய முக்கோண வடிவுள்ள தகடு ஒன்று, அதன் தளம் கிடையாக இருக்கும் வண்ணம், அதன் முனைகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட மூன்று நிலைக்குத்து இழைகளாலே தாங்கப்படுகிறது. W எடையுடைய துகள் ஒன்று, அம்முக்கோணத்தின் செங்குத்து மையத்தில் வைக்கப்படுகிறது. இழைகளில் உள்ள இழுவிசைகள் T_1, T_2, T_3 எனின்

$$\frac{T_1}{1+3\cot B\cot C}=\frac{T_2}{1+3\cot C\cot A}=\frac{T_3}{1+3\cot A\cot B}$$

எனக் காட்டுக.

15. ஒவ்வொன்றும் W எடையும், ஆரை r உம் உடைய இரு சமமான மழமழப்புள்ள கோளங்கள், இரு பக்கங்களும் திறந்த கிடைத் தளத்திலுள்ள, உள்ளீடற்ற நிலைக்குத்து உருளைக்குள் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றன. உருளையின் ஆரை $a < 2r$ எனில், உருளையின் எடை $2W\left(1-\frac{r}{a}\right)$ க்குக் குறைவாக இருப்பின், அது கவிழ்ந்துவிடுமெனக் காண்பி.

9. உராய்வு

(Friction)

1. அதிகாரம் 1, பிரிவு 15 இல் விசையினங்களைப் பற்றிக் கவனிக்கும்போது உராய்வு விசையைப் பற்றிப் படித்தோம்.

மழமழப்பான பொருள்கள் இரண்டு ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், அவற்றிடையே உள்ள ஒரே தாக்கம், அத்தொடு புள்ளியிலே இரு மேற் பரப்புகளுக்கும் செங்குத்தாக இருக்குமெனக் கூறினோம்.

ஆகவே, மழமழப்பான பொருள்களுள் ஒரு பொருளானது மற்றைப் பொருளின்மீது வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு முயலும் விசை யாதுமில்லை.

எனினும், நடைமுறையிலே நிறை மழமழப்புடைய பொருள்கள் யாதும் இல்லை. ஒன்றையொன்று தொடும் பொருள்களுக் கிடையே ஒரு பொருளின்மீது ஒரு பொருள் வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு யாதேனுமொரு விசை எப்பொழுதும் உண்டு. அத்தகைய விசையே உராய்வு விசை எனப்படும்.

உராய்வு வரையறை

இரு பொருள்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், ஒரு பொருளானது மற்றையதன்மீது வழுக்குதலைத் தடுப்பதற்கு அவற்றினுடைய தொடு புள்ளியில் உஞற்றப்படும் விசைக்குக் காரணமாயுள்ள அவ்விரு பொருள்களினுடைய பண்பு, உராய்வு எனப்படும். அன்றியும், உஞற்றப்பட்ட விசை, உராய்வு விசை எனப்படும்.

2. உராய்வு என்பது தானாகவே சரிக்கட்டும் விசை. இயக்கத்தைத் தப்படுதற்கு அதிகமாக உராய்வு நிகழ்வதில்லை.

ஒரு பட்டையான அடித்தளத்தையுடைய ஒரு பாரமான இரும்புத் துண்டு, ஒரு கிடை மேசையின்மீது வைக்கப்படட்டும். அதில், யாதேனுமொரு புள்ளிக்கு ஓரிழைத் துண்டு கட்டி, அத்துண்டின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும் ஒரு கிடைத்திசையில் இழுக்கப்பட்டால், அப்பொருளின் இயக்கத்தைத் தடுக்கும் ஒரு தடை உணரப்படும். இப்பொழுது நாம் இழுப்பதை நிறுத்திவிட்டால், உராய்வு விசையும் தாக்காது நின்றுவிடும். ஏனெனில், உராய்வு விசை நிற்காவிட்டால், அப் பொருள் இயங்கும், இது நிகழாததால், உராய்வு விசையும் செயல் படுவதில்லை என்பது தெளிவு.

எனினும், அப்பொருள்களுக்கிடையே உஞற்றப்படக் கூடிய உராய்வுத்தொகை எல்லையற்றதன்று. அத்துண்டின்மீது செயல்படும் இழுவிசையை அதிகரித்துக் கொண்டே போனால், இறுதியாக இவ்விசையை மேற்கொள்வதற்கு உராய்வு போதியதாகாது. அப்பொழுது, அப் பொருள் இயங்கும்.

சாதாரண வாழ்க்கையில் உராய்வின் முக்கியத்துவம் உணரப்படுகின்றது. நம் காலணிகளுக்கும் தரைக்கும் இடையே உராய்வு இல்லையாயின், நாம் நடத்தல் இயலாது, ஓரேணிக்கும் தரைக்கும் இடையே உராய்வு இல்லையாயின் ஏணியானது நிலைக்குத்திற்குச் சாய்ந்த யாதேனுமொரு நிலையில், பிடிக்கப்பட்டாலன்றி, ஓய்வில் இருக்காது. உராய்வின்றி ஆணிகளும். திருகாணிகளும் மரத்திற்குள்ளே நிற்கமாட்டா. உராய்வு இல்லாவிடின், ரயில் இஞ்சின்களும் வண்டித் தொடர்களை இழுக்க மாட்டா.

3 நிலையியல் உராய்வு விதிகள் பின்வருமாறு (Laws of Statical friction)

விதி I

இரு பொருள்கள் ஒன்றை யொன்று தொட்டுக் கொண்டிருந்தால், அவற்றுள் ஒன்றன்மீது அதனுடைய தொடு புள்ளியிலுள்ள உராய்வினது திசை, இத் தொடு புள்ளி இயங்கத் தொடங்கும் திசைக்கு எதிராகும்.

விதி II

சம நிலையிலுள்ளபோது, உராய்வின் அளவு பொருளின் இயக்கத்தைத் தடுப்பதற்குச் சரியாகப் போதியதாகும்.

4. மேற் கொடுக்கப்பட்ட விதிகள் பொதுவாக உண்மையாகும். ஆனால், உஞற்றப்படக்கூடிய உராய்வுத் தொகை எல்லையுள்ளது. சில

வேளைகளில், சம நிலை அழிக்கப்படக்கூடிய நிலையில் இருக்கும்; பெரும்பாலும் இயக்கம் விளையும்.

எல்லை உராய்வு : (Limiting friction)

வரையறை

ஒரு பொருள் வேறொரு பொருளின்மீது சரியாக வழுக்குறு நிலையில் இருந்தால், அச்சமநிலை எல்லை யடைகின்ற தெனப்படும். அப்போது, உளூற்றப்படும் உராய்வு எல்லை யுராய்வு எனப்படும்.

எல்லை யுராய்வினது திசை விதி I ஆலே தரப்படும்.

எல்லை யுராய்வினுடைய அளவு, பின்வரும் மூன்று விதிகளாலே தரப்படும்.

விதி III

எல்லை யுராய்வின் அளவு செங்குத் தெதிர்த் தாக்கத்திற்கு எப்பொழுதும் ஒரு மாறு விகிதத்தில் இருக்கும். இவ்விகிதம், அப்பொருள்களின் அடிப்படைப் பொருட் கூறுகளை மட்டுமே சார்ந்திருக்கும்.

விதி IV

செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் மாறுதிருக்கும் வரைக்கும், எல்லை யுராய்வு தொடும் மேற் பரப்புகளுடைய பரப்பையும், வடிவத்தையும் சாராதிருக்கும்.

விதி V

ஒரு பொருள் வேறொரு பொருளின் மீது வழுக்குதலால், இயக்கம் விளையும்போது, உராய்வின் திசை இயக்கத் திசைக்கு எதிராகும். உராய்வின் அளவு வேகத்தைச் சாரந்ததல்ல. ஆனல், உராய்வானது செங்குத் தெதிர்த் தாக்கத்தோடு கொள்ளும் விகிதம், பொருள்ஓய்விலிருந்து இயங்கத் தொடங்கும் தருணத்தில் உள்ள விகிதத்திலும் சற்றுக் குறைவாகும்.

குறிப்பு

மேற் கொடுக்கப்பட்ட விதிகள் பரிசோதனையால் அறியப்பட்டன. அவை, பொது நிபந்தனைகளுக்குக் கீழ் உண்மையானவை.

உதாரணமாகத் தொடு மேற் பரப்புகளானவை நெரிக்கப்படு நிலையில் இருக்கும்படி, ஒரு பொருள் வேறொன்றின்மீது இறுக்கமாய் அமுக்கப்

பட்டால், விதி III உண்மையாகாது. அப்போது, செங்குத் தெதிர்த்தாக் திலும், கூடிய வீதத்தில் உராய்வு அதிகரிக்கும்.

5. உராய்வுக் கெழு (Coefficient of friction)

எல்லை யுராய்வானது செங்குத் தமுத்தத்துடன் கொள்ளும் மாறு விகிதம், உராய்வுக் கெழு எனப்படும். அது, பொதுவாக μ என்பதனுல் குறிக்கப்படும்.

சமநிலை அழிக்கப்படும் நிலையில் இருக்கும்போது, F என்பது உராய்வையும், Rஎன்பது செங்குத் தெதிர்த் தாக்கத்தையும் குறித்தால், நாம் பெறுவது,

$$\frac{F}{R} = \mu$$

ஆகவே, $F = \mu R$

குறிப்பு 1 சமநிலை எல்லையுறு நிலையில் இல்லாவிடில், அதே மதிப்புடைய Rக்கு, உராய்வு விசை Fஎன்பது μRஐ விடக் குறைவாகும்.

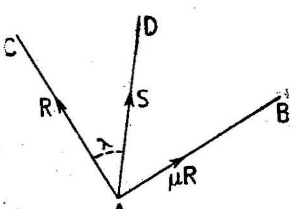
குறிப்பு 2 ஒருபோதும் Fஎன்பது μRஐ விடப் பெரியதாய் இருக்க முடியாது.

குறிப்பு 3 ஒன்றையொன்று தொடும் வெவ்வேறு பொருட் சோடிகளுக்கு μவினுடைய மதிப்புப் பெரிதும் வித்தியாசப்படும். எனினும், உராய்வுக் குணகம் 1அளவு பெரிதான பொருட் சோடிகள் தெரியப்படவில்லை.

6. உராய்வுக் கோணம் (Angle of Friction)

சமநிலை எல்லையுறும்போது, உராய்வும், செங்குத் தெதிர்த் தாக்கமும் ஒரு தனி விசையாகச் சேர்க்கப்படின், செங்குத்தோடு இவ் விசை உண்டாக்கும் கோணம் உராய்வுக் கோணம் எனப்படும்.

அத்தனி விசை விளைவெதிர்த் தாக்கம் எனப்படும்.



படம்-88

A என்பது அவ்விரு பொருள்களுடைய தொடு புள்ளியாகுக. AC, AB என்பன செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் R, உராய்வு μR என்பனவற்றினுடைய திசைகளாகுக. இவ்விரண்டினுடைய விளைவு Sஇன் திசை ADயாகுக. S என்பது விளை வெதிர்த் தாக்கம் எனப்படும்.

$\angle$CAD என்பது உராய்வுக் கோணமாகும்.

$\angle CAD = \lambda$ என்க.

R, μR என்பன S இன் கூறுகள் ஆதலால், நாம் பெறுவன

$$S \cos \lambda = R \quad \text{(i)}$$

$$S \sin \lambda = \mu R \quad \text{(ii)}$$

$$\therefore \ S^2 \cos^2 \lambda + S^2 \sin^2 \lambda = R^2 + \mu^2 R^2$$

(அ-து) $S^2 = R^2(1+\mu^2)$

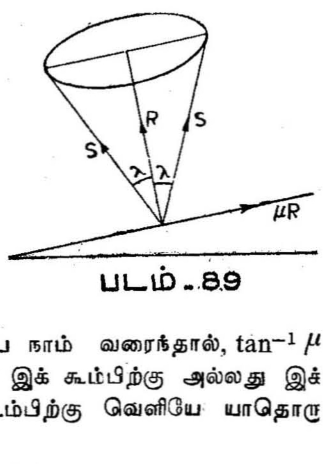
$$\therefore \ S = R\sqrt{1+\mu^2} \quad (1)$$

$$\frac{\text{(ii)}}{\text{(i)}} \rightarrow \tan \lambda = \mu \quad (2)$$

ஆகவே, உராய்வுக் கெழு. உராய்வுக்குக் கோணத்தினது தான்சண்ட்க்குச் சமமெனக் காண்கிறோம்.

7. உராய்வுக் கூம்பு (Cone of friction)

உராய்வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு μR ஆக இருக்கின்றமையால், செங்கோட்டோடு விளைவெதிர்த் தாக்கத்தினுடைய திசை உண்டாக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய கோணம் λ (அ-து) $\tan^{-1}\mu$ எனப் பெறப்படும்.



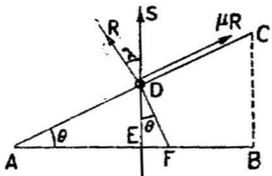
படம் 89

எனின், இரு பொருள்களானவை தொட்டுக்கொண்டிருக்க, பொதுச் செங்குத்தை அச்சாகவும், தொடு புள்ளியை உச்சியாகவும் கொண்டு, அரை உச்சிக் கோணம் ஆகவுள்ள ஒரு கூம்பை நாம் வரைந்தால், $\tan^{-1}\mu$ விளை வெதிர்த் தாக்கத்தின் எத்திசையும் இக் கூம்பிற்கு அல்லது இச் கூம்பின்மீது இருத்தல் வேண்டும், இக் கூம்பிற்கு வெளியே யாதொரு திசையும் அதற்கு இருக்கமுடியாது.

இக்கூம்பு உராய்வுக் கூம்பு எனப்படும்.

8. தேற்றம்

ஒரு பொருள் மழமழப்பான சாய்தளம் ஒன்றின்மீது வைக்கப்பட்டுத் தன் எடையும், அத்தளத்தினுடைய எதிர்த் தாக்கங்களுமாகிய இவற்றினாலேயே கீழ்முகமாக வழுக்கு நிலையில் இருந்தால், அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தின்சாய்வுக் கோணம், உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமன்.



படம் - 90

θ என்பது அத்தளத்தின் அடிவானச் சாய்வாகுக. W என்பது அப்பொருளின் எடையையும், R எதிர்த் தாக்கத்தையும் குறிக்க. அப்பொருள் அத்தளத்தின்மீது கீழ்முகமாக இயங்கும் நிலையில் இருப்பதால், உராய்வு அத்தளத்தின்மீது μR என்பதற்குச் சமமாய் மேன்முகமாகத் தாக்கும்.

அப்பொருளானது R, μR, W என்பனவற்றினுடைய தாக்கத்தின் கீழ்ச் சமநிலையில் இருக்கிறது.

இப்பொழுது, R, μR என்ற விசைகளைச் சேர்க்க, அவற்றின் விளைவாக Sஎன்னும் விளை வெதிர்த் தாக்கம் கிட்டும்.

இவ்விளை வெதிர்த் தாக்கமும், Wவும் பொருளைச் சமநிலையில் வைப்பதால், S நிலைக்குத்தாகி, W உடன் ஒரே கோட்டில் இருக்கும்

சமநிலை எல்லையுறுதலால், விளை வெதிர்த் தாக்கம், செங்குத்து Rஉடன் உராய்வுக் கோணம் λவை உண்டாக்கும்.

$\therefore \angle EDF =$ குத்தெதிர்க் கோணம் λ

ஆகவே $\theta = \angle DAE$

$= 90^\circ - \angle ADE$

$= \angle EDF = \lambda$

$\theta =$ உராய்வுக் கோணம்

இதை வேறு வழியிலும் காட்டலாம்;

விசைகளை அத்தளத்திற்குச் செங்குத்தாயும், சமாந்தரமாயும் பிரிக்க நாம் பெறுவன

$$W \cos \theta = R$$

$$W \sin \theta = \mu R$$

எனின், வகுத்தலால், $\tan \theta = \mu = \tan \lambda$

$= \tan$ (உராய்வுக் கோணம்)

$\therefore \theta =$ உராய்வுக் கோணம்

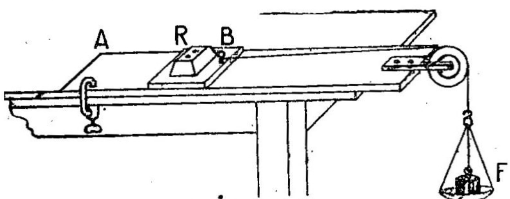
குறிப்பு 1

இப்பொழுது நிறுவப்பட்ட பண்பு காரணமாக, உராய்வுக் கோணம் சில வேளைகளில் ஓய்வுக்கோணம் (angle of repose) எனப்படும்.

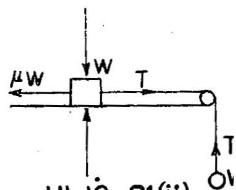
குறிப்பு 2

ஒரு பொருள் ஒரு புறவிசையாலே தாக்கப்பட்டு, ஒரு சாய்தளத்தின் ஓய்விலிருந்தால், அத்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம், உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமெனக் கொள்ளலாகாது.

குறிப்பு 3 பரிசோதனையால், உராய்வுக் கெழுவை நிர்ணயித்தல்



படம்-91(ii)



படம்-91(ii)

ஒரு மழமழப்பான பெரு மரப் பலகை A என்பதை எடுத்து, அது கிடையாக இருக்குமாறு ஓரிறுக்கியால் பிடிக்க. வழுக்குந் துண்டாக மற்றொரு மரத்துண்டு B என்பதை எடுத்து, அதை மழமழப்பாக்குக. அதற்கு ஓர் இலேசான இழையைத் தொடுத்து, அவ்விழையைத் துண்டு A என்பதிலே நிலைப்படுத்திய ஓர் இலேசான கப்பிக்கு மேலாகச் செலுத்துக. இழையின் மற்றை முனையில் ஒரு தராசுத் தட்டை இணைக்க.

வழுக்குந் துண்டின்மீது ஒரு தெரிந்த எடை R என்பதையும், அவ் வழுக்குந் துண்டு இயங்கத் தொடங்குவதற்கு வேண்டிய எடை F ஐத் தராசுத் தட்டிலும் இடுக, இப்பொழுது வலக்கைப் படத்தைக் காண்க.

வழுக்குத் துண்டினதும், R இனதும் மொத்த எடையும் W ஆகுக. W′ என்பது தராசுத் தட்டினதும், F இனதும் மொத்த எடையாகுக.

வழுக்குந் துண்டு இயங்கத் தொடங்கும் நிலையிலே இருத்தலால், அதன்மீதுள்ள உராய்வு μW ஆகும், அவ்விழையின் இழுவிசை T என்பது தராசுத் தட்டோடு கூடிய F என்பதைச் சமநிலைப் படுத்துதலால் W′ என்பதற்குச் சமன்.

வழுக்குந் துண்டின் சமநிலையிலிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\mu W = T = W'$$

$$\therefore \mu = \frac{W'}{W}$$

இனி, விதி 3இன் முதலாம் பகுதியின் உண்மை, (அ-து) μ இன் பெறுமானம் செங்குத் ததிர் தாக்கத்தைச் சாரா தென்பதைச் சோதித் துப் பார்க்கலாம்.

இப்பொழுது, அவ்வழுக்கியின்மீது வேறொரு எடையை வைத்து, வழுக்கியானது மறுபடியும் இயக்க நிலையை அடையும் வரைக்கும் Fஎன்ற எடையைத் தகுந்தவாறு மாற்றுக.

W, W′ என்பன வற்றினுடைய புதுப் பெறுமானங்கள் W_1, W_1' என்பனவாகுக.

எனின், $\frac{W_1'}{W_1} = \mu$ என முன்மதிப்பே கிட்டுவதைக் காணலாம்.

வழுக்கியின் மீது வெவ்வேறு எடைகளை வைத்து, மறுபடியும் பரிசோதனை செய்து $\frac{W_2'}{W_2}$, $\frac{W_3'}{W_3}$, ...என்பனவற்றினுடைய பெறுமானங்களைப் பெறுக.

ஆயின், $\frac{W'}{W}, \frac{W_1'}{W_1}, \frac{W_2'}{W_2}, \frac{W^3}{W_3}$ என்பன அண்ணளவாகச் சமமெனக் காணப்படும்.

எனின், விதி, 3 இன், முதலாம் பகுதி பரிசோதிக்கப் பெற்றது. இனி, இதர விதிகளையும் நாம் சோதித்துப் பார்க்கலாம்.

பலகை A யுடன் தொட்டுக் கொண்டிருக்கும் பலகை B யின் பரப்பை, மேலுள்ள பரிசோதனையில் இருப்பதைவிடப் பெரிதும் வித்தியாசப்படும்படி எடுத்துக் கொள்ளவும்.

மறுபடியும் பரிசோதனை i ஐச் செய்து μ இன் மதிப்பைப் பெறுக, அது, பரிசோதனை யெல்லைக்குள் பரிசோதனை 1 இல் கிட்டிய அதே அளவினதாகும்.

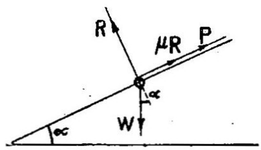
எனின், விதி IV இன் உண்மை வெளிப்படுகிறது.

இதே போல், இதரவிதிகளையும் பரிசோதித்துப் பார்க்கலாம்.

9) வழவழப்பற்ற சாய்தள மொன்றின் மீதுள்ள சமநிலை
(Equilibrium on a rough inclined plane)

தேற்றம்

ஒரு பொருள் அடிவானத்திற்கு உராய்வுக் கோணத்திலும், பெரிய கோணத்தில் சாய்ந்த வழவழப்பற்ற சாய்தளம் ஒன்றன்மீது வைக்கப்பட்டு, மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டினது நீளத்திற்கு அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்ற ஒரு விசையினாலே தாங்கப்படுகின்றது, அவ்விசை, எவ்வெல்லைகளுக்கிடையே இருக்கவேண்டு மெனக் காணல்.



படம் - 92

அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வு α ஆகுக.

W என்பது அப்பொருளினது எடையையும், R என்பது செங்குத் தெதிர்த் தாக்கத்தையும் குறிக்க.

வகை I

அப்பொருள் அத் தளத்தின்மீது கீழ் முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்க.

ஆகவே, உராய்வு μR அத்தளத்தின் மேல் முகமாகத் தாக்கும்.

P என்பது அப்பொருளை ஓய்வில் வைத்திருப்பதற்கு வேண்டிய விசையாகுக.

விசைகளை அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$P+\mu R=W\sin\alpha \quad (1)$$

$$R=W\cos\alpha \quad (2)$$

(1), (2) லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$P=W(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

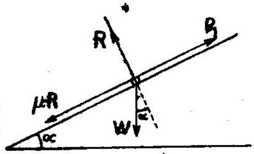
ஆனால், $\mu=\tan\lambda$

$$\therefore\ P=W[\sin\alpha-\tan\lambda\cos\alpha]$$

$$=W\left[\frac{\sin\alpha\cos\lambda-\cos\alpha\sin\lambda}{\cos\lambda}\right]$$

$$P = W\frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\cos\lambda} \qquad \text{I}$$

வகை II



படம்-93

அப்பொருள் அத்தளத்தின்மீது, மேன் முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்க.

ஆகவே, உராய்வு μ R அத்தளத்தின்மீது கீழ் முகமாகத் தாக்கும்.

P_1 என்பது அப்பொருளை ஒய்வில் வைப் பதற்கு வேண்டிய விசையாகுக.

விசைகளை அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும், நிலக்குத்தாகவும் பிரிக்க நாம் பெறுவன

$$P_1 = \mu R + W\sin\alpha \quad (1)$$

$$R = W\cos\alpha \quad (2)$$

ஆகவே, $P_1 = W(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$

$$= W(\sin\alpha + \tan\lambda\cos\alpha)$$

$$= W\frac{(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda)}{\cos\lambda}$$

$$P_1 = \frac{W\sin(\alpha + \lambda)}{\cos\lambda} \qquad \text{II}$$

குறிப்பு 1

அப்பொருள் சமநிலையில் இருக்கவேண்டுமாயின் சமன் பாடுகள் I, II ஆல் கிடைக்கும்.

P, P_1 என்பது புறவிசையின் எல்லையுறும் பெறுமானங்களைத் தருகின்றன.

அப்புறவிசை P, P_1 என்பனவற்றிற்கிடையே இருந்தால், அப் பொருள் சமநிலையில் இருக்கும், ஆனல், அது எல்லையுறு சமநிலை ஆகாது. அதாவது, அப்பொருள் இரு திசைகள் ஒன்றிலாவது இயங்கு நிலையில் இருக்காது.

எனின், சம நிலைக்கு அவ்விசை $\frac{W\sin(\alpha \pm \lambda)}{\cos\lambda}$ என்னும் பெறுமானங்களுக் கிடையே கிடக்க வேண்டும்.

குறிப்பு 2

P_1 இன் பெறுமானம், P இன் பெறுமானத்திலிருந்து μ இன் குறியை (அ-து) λ வின் குறியை மாற்றுவதால் பெறப்படலாம் என்பது கவனிக்கப்படவேண்டும்.

10. தேற்றம்

ஒரு பொருள் அடிவானத்திற்கு உராய்வுக் கோணத்திலும் பெரிய கோணத்தில் சாய்ந்த உராய்வுடைய சாய்தளம் ஒன்றன்மீதும் வைக்கப் பட்டு, அத்தளத்திற்கு θ கோணச் சாய்வில் மேன்முகமாகத் தாக்கும் விசை யொன்றில் தாக்கப்பட்டுச் சமநிலையில் இருக்கின்றது. எல்லை யுறு சமநிலைக்கு அவ்விசையின் மதிப்பைக் காணல்.

அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வு a ஆகுக. எனின், $a > \lambda$ W என்பது அப்பொருளினது எடையையும், R என்பது செங்குத் தெதிர்த் தாக்கத்தையும் குறிக்க.

வகை I

அப்பொருள் அத்தளத்தின் மீது கீழ் முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்க.

ஆகவே, உராய்வு μR அத்தளத்தின் மீது மேன் முகமாகத் தாக்கும்.

P என்பது அப்பொருளை எல்லையுறு சமநிலையில் வைத்திருப்பதற்கு வேண்டிய விசையாகுக.

அப்பொருள்மீது தாக்கும் விசைகளாவன:

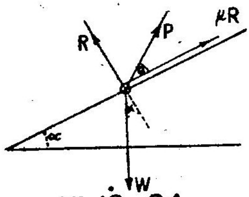
(i) நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும் அப்பொருளின் எடை $W\rho$,

(ii) சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் R,

(iii) சாய்தளத்தின் மேன்முகமாகச் செயல்படும் எல்லையுராய்வு μR,

(iv) சாய்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் செயல்படும் புறவிசை P.

விசைகளை அச்சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும், நிலைக்குத்தாக வும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன



படம் - 94

$$P \cos \theta + \mu R = W \sin \alpha \quad (1)$$

$$P \sin \theta + R = W \cos \alpha \quad (2)$$

(2) ஐ μ ஆற் பெருக்கிக் கழித்தலால், நாம் பெறுவது

$$P = \frac{W(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(\cos \theta - \mu \sin \theta)}$$

put μ = tan λ we get the value

$$P = \frac{W \sin (\alpha - \lambda)}{\cos (\theta + \lambda)} \qquad I$$

வகை II

பொருளானது தளத்தின்மீது மேன்முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது தேவையான விசையின் அளவு P_1 ஆகுக.

இவ்வகையில், எல்லை யுராய்வு விசை சாய்தளத்தின் விசைகளைச் சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும், நிலைகுத்தாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$P_1 \cos \theta = W \sin \alpha + \mu R \quad (1)$$

$$P_1 \sin \theta + R = W \cos \alpha \quad (2)$$

(1), (2) லிருந்து நாம் பெறுவது

$$P_1 = \frac{W \sin (\alpha + \lambda)}{\cos (\theta - \lambda)} \qquad II$$

குறிப்பு : வகை I

விடை I இல் μஇன் குறியை மாற்றி விடை IIஐ நாம் பெற்றிருக்கக் கூடும்.

கி. தே.

அத்தளத்தின் மேன்முகமாக அப்பொருளைச் சரியாக இயக்கும் விசையின் மிகச் சிறிய அளவு வேண்டின்,

$W . \dfrac{\sin (\alpha + \lambda)}{\cos (\theta - \lambda)}$ மீச்சிறு மதிப்பை அடைய வேண்டும்.

இதற்கு, $\cos (\theta - \lambda)$ மீப்பெரு மதிப்பை அடைய வேண்டும்.

(அ-து) $\cos(\theta-\lambda) = 1$ ஆக வேண்டும்.

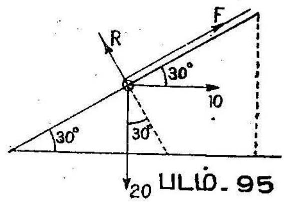
(அ-து) $\theta=\lambda$) ஆக வேண்டும்.

ஆகவே, ஒரு தளத்தின்மீது மேன்முகமாக ஒரு பொருளை இயக்கு தற்கு வேண்டிய விசையானது, சாய்தளத்தோடு உராய்வுக் கோணத் திற்குச் சமமான ஒரு கோணத்தை உண்டாக்கும் திசையில் பிரயோ கிக்கப்பட்டால் மிகச் சிறிதாகும்.

11 உதாரணம் 1

20 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருள், அடிவானத்திற்கு 30° யிற் சாய்ந்த உராய்வுடைய தள மொன்றின் மீது கிடக்க, 10 கிலோ கிராம் எடைக்குச் சமமான கிடைவிசை யொன்றுலே தாங்கப்படுகிறது. உராய்வு விசையைக் காண்க.

உராய்வு விசை F எனக் கொள்க. சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாக விசைகளைப் பிரிக்க, நாம் பெறுவது



படம். 95

$$F+10\cos 30^\circ=20\sin 30^\circ$$

$$\therefore\ F=20\sin 30^\circ-10\cos 30^\circ$$

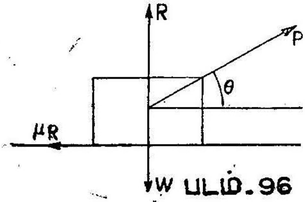
$$=10-5\sqrt{3}$$

$$=10-8.66$$

$=1.34$ கிலோ கிராம் எடை

உதாரணம் 2

ϕ என்பது உராய்வுக் கோண மெனின், W என்னும் ஒரு எடையை உராய்வுடைய ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீது இயக்கக் கூடிய மிகச் சிறிய விசை $W\sin\phi$ எனக் காட்டுக.



படம். 96

தேவைப்பட்ட விசை P என்பது கிடைத்தளத்துடன் θ கோணச் சாய்வில் செயல்படின்,

விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக் குத்தாகவும் பிரிக்க நாம் பெறுவது

$$P\cos\theta=\mu R \quad (1)$$

$$R+P\sin\theta=W \quad (2)$$

(1), (2) லிருந்து, $P(\cos\theta+\mu\sin\theta)=\mu W$ எனவரும்

(அ-து) $P\cos(\theta-\phi)=W\sin\phi$ $[\because \mu=\tan\phi]$

$$\therefore P=\frac{W\sin\phi}{\cos(\theta-\phi)}$$

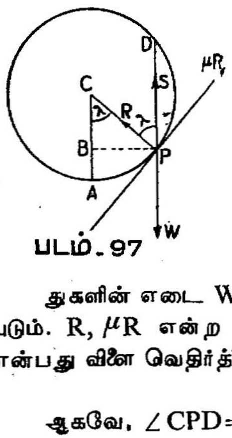
$\cos(\theta-\phi)=1$ ஆகும்பொழுது, P தனது மீச்சிறு மதிப்பை அடையும்.

(அ-து) $\theta=\phi$ ஆகவேண்டும்,

அப்பொழுது, Pயின் மதிப்பு $=W\sin\phi$

உதாரணம் 3

உராய்வுக்கெழு $\sqrt{\frac{1}{3}}$ ஆயின், a என்னும் ஆரையையுடைய ஒரு குழிக் கோளத்தினுள்ளே எவ்வளவு உயரத்தில் ஒரு துகள் ஓய்வில் கிடக்கும்?



படம்-97

கோளத்தின் மையத்தை C என்றும் துகளின் நிலையை P என்றும் குறிப்போம்.

Pயில் உள்ள செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் C வழியாகச் செல்லும்.

μR என்ற உராய்வு விசை Pயில் உள்ள தொடு கோட்டு வழிப் படத்தில் குறிப்பிட்டது போல் செயல்படும்.

துகளின் எடை W என்பது P வழி நிலைக்குத்தாகக் கீழே செயல்படும். R, μR என்ற விசைகளைச் சேர்த்தால், அவற்றின் விளைவு S என்பது விளை வெதிர்த் தாக்கமாகும்.

ஆகவே, $\angle CPD=\lambda$ ஆகும்.

இப்பொழுது, S, W என்ற விசைகள் துகளைச் சமநிலையில் வைப்பதால், S நேர்க்குத்தாக மேல் நோக்கிச் செயல்படும். $\therefore$ PD நிலைக்குத்தாகும். CAயும் நிலைக்குத்தாதலால்,

$$\angle ACP=\angle CPD=\lambda$$

$$\tan\lambda=\mu=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \lambda=30^\circ$$

∴ துகள் ஓய்வில் இருக்கும் உயரம்

$$=AB=AC-CB$$

$$=a-a\cos 30^\circ$$

$$=a(1-\cdot 866)=a\times\cdot 134$$

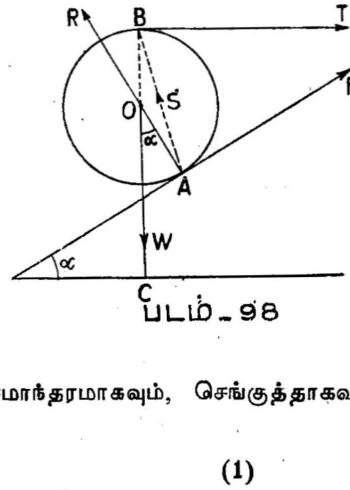
உதாரணம் 4

அடிவானத்துடன் α என்னும் கோணத்தில் சாய்வில் உள்ள உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் மீது W எடையுடைய ஒரு கோளம், அதன் மிக உயரமான புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்ட கிடை இழையினால் சமநிலையில் வைக்கப்படுகிறது. இழையின் இழுவிசை W tan $\frac{1}{2}\alpha$ என்றும், உராய்வுக் கோணம் $\frac{1}{2}\alpha$ என்பதைவிடப் பெரிய தென்றும் காட்டுக.

சாய்தளத்தைக் கோளம் தொடும் புள்ளி A ஆகுக.

கோளத்தின் மிக உயர்ந்த புள்ளி B ஆகுக.

Aயில் உள்ள செங்குத் தெதிர்த் தாக்கத்தை R என்றும், Aயில் உள்ள உராய்வு விசையை F என்றும், இழையின் இழுவிசையை T என்றும் குறிப்போம்.



படம் - 98

விசைகளைச் சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகவும், செங்குத்தாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$F+T\cos\alpha=W\sin\alpha \qquad (1)$$

$$R=W\cos\alpha+T\sin\alpha \qquad (2)$$

A பற்றித் திருப்புத் திறன் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$W.\, a\sin\alpha=T\, a\,(1+\cos\alpha) \quad (3)$$

$$\therefore\ T=\frac{W\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{W.\,2\sin\alpha/2\,\cos\alpha/2}{2\cos^2\alpha/2}$$

$$\underline{T=W.\tan\alpha/2}$$

இம்மதிப்பை (1) இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$F=W\sin\alpha-T\cos\alpha$$

$$=W\sin\alpha-W\tan\tfrac{1}{2}\alpha\cos\alpha$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{1}{2} \alpha} (\sin \alpha \cos \tfrac{1}{2} \alpha - \cos \alpha \sin \tfrac{1}{2} \alpha)$$

$$= W \tan \tfrac{1}{2} \alpha$$

T யின் மதிப்பை (2) இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$R = W \cos \alpha + W \tan \tfrac{1}{2} \alpha \sin \alpha$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{1}{2} \alpha} (\cos \alpha \cos \tfrac{1}{2} \alpha + \sin \alpha \sin \tfrac{1}{2} \alpha)$$

$$= \frac{W}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \cos \tfrac{1}{2} \alpha = W$$

இப்பொழுது, $\mu R > F$

(அ-து) $\mu W > W \tan \frac{1}{2} \alpha$

(அ-து) $\mu > \tan \frac{1}{2} \alpha$

(அ-து) $\tan \lambda > \tan \frac{1}{2} \alpha$

$\therefore \quad \underline{\lambda > \frac{1}{2} \alpha}$

வேறுவழி

R, F இன் விசைகளின் விளைவு R_1 புள்ளி A வழிச் செல்லும்; T, W வின் விசைகளின் விளைவு B வழிச் செல்லும். இவ்விரு விசைகளும் நேர்சமமாயிருப்பதால், R_1 திசை AB யில் தாக்குகின்றது. ஆகையால்

$\hat{OAB} \leqslant \lambda$ (பக்கம் 186—5_2 குறிப்பு பார்க்கவும்)

ஆனால், $\hat{COA} = \alpha = \hat{OBA} + \hat{OAB} = 2\ \hat{OAB}$

as $\hat{OBA} = \hat{OAB} \because OA = OB$)

$\therefore \hat{OAB} = \alpha/2$

$\therefore \alpha/2 \leqslant \lambda$

A பற்றித் திருப்புத் திறன் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$W.a \sin \alpha = Ta\,(1 + \cos \alpha)$$

$$\therefore T = \frac{W \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{W\, 2 \sin\alpha/2 \cos \alpha/2}{2 \cos^2 \alpha/2}$$

$$T = W. \tan \alpha/2.$$

உதாரணம் 5

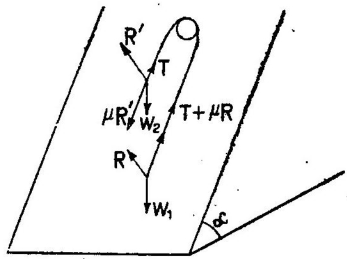
உராய்வுடை ஒரு சாய்தளத்தின்மீது W_1, W_2 என்ற இரு எடைகள் $(W_1 > W_2)$, அத்தளத்திலே யுள்ள ஒரு நிலையான கப்பியைச் சுற்றிச் செல்கின்ற ஓரிழையால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அந்த எடைகளின் சமநிலைக்கு இசைவான அத்தளத்தின் மிகப் பெரியச் சாய்வு α எனில்,

$$\tan \alpha = \frac{\mu(W_1 + W_2)}{W_1 - W_2}$$ எனக் காட்டுக.

$W_1 > W_2$ ஆதலால், W_1 கீழ் முகமாக இயங்கு நிலையிலிருக்கும். ஆகவே W_2 மேன்முகமாக இயங்கு நிலையிலிருக்கும்.

R, R_1 என்பன செங்குத்தெதிர்த் தாக்கங்கள் ஆகுக.

அத்தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும், விசைகளைப் பிரிக்க, நாம் பெறுவன



படம்-99

$$T + \mu R = W_1 \sin \alpha \; (1) \quad R = W_1 \cos \alpha \; (2)$$

$$T - \mu R' = W_2 \sin \alpha \; (3) \quad R' = W_2 \cos \alpha \; (4)$$

(2) லிருந்து (1) இல் பிரதியிட்டு, (4) லிருந்து (3) இல் பிரதியிட்டுக் கழிக்க, நாம் பெறுவது

$$\mu (W_1 \cos \alpha + W_2 \cos \alpha) = (W_1 - W_2) \sin \alpha$$

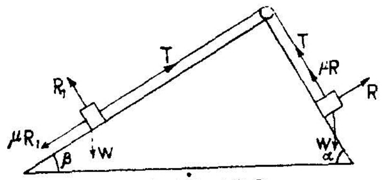
$$\mu (W_1 + W_2) \cos \alpha = (W_1 - W_2) \sin \alpha$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\mu (W_1 + W_2)}{W_1 - W_2}$$

உதாரணம் 6

சமமான உராய்வுடைய இரு தளங்களின் உச்சிக்கு மேலாக வைத்த ஓரிழையினுடைய முனைகளுக்கு, இரண்டு சம எடைகள் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அச்சாய்தளங்கள் ஒன்றுக்கொன்று பின்புறமாக வைக்கப் பட்டனவாய், ஒரே உயரத்தையும் அடிவானத்திற்கு முறையே $\alpha, \beta \; (\alpha > \beta)$ என்னும் சாய்வுக் கோணங்களையும் கொண்டிருக்கின்றன.

எடைகள் எல்லையுறும் சமநிலையில் இருக்கும்போது, உராய்வுக் கெழு $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ என்பதற்குச் சம மெனக் காட்டுக.



படம்-100

செங்குத் தெதிர்த் தாக்கங்களை R, R_1 என்னும், இழையின் இழுவிசையை T என்றும் குறிப்போம்.

அதிக ஏற்றமுள்ள சாய்தளத்தின் மேலுள்ள எடை கீழ் முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்கும். ஆகவே, β சாய்வுள்ள தளத்தின்மீதுள்ள எடை, மேன்முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்கும்.

இதனால், α சாய்வுள்ள தளத்தில், உராய்வு விசை μR மேல் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. β சாய்வுள்ள மற்றைய சாய்தளத்தில், உராய்வு விசை $\mu R'$ சாய்தளத்தின் கீழ் நோக்கிச் செயல்படும்.

சாய்வு α உள்ள சாய்தளத்திற்கு இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் விசைகளைப் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$T+\mu R=W\sin\alpha \quad (1)$$
$$R=W\cos\alpha \quad (2)$$

இதேபோல், சாய்வு β உள்ள சாய்தளத்தின் இணையாகவும், செங்குத்தாகவும் விசைகளைப் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$T-\mu R_1=W\sin\beta \quad (3)$$
$$R_1=W\cos\beta \quad (4)$$

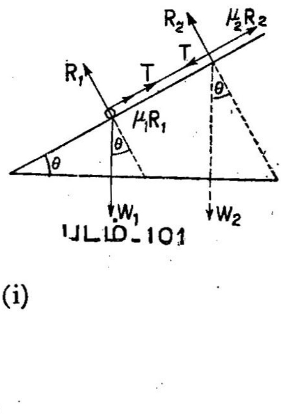
(2) லிருந்து (1) இல் பிரதியிட்டு, (4) லிருந்து (3) இல் பிரதியிட்டு கழிக்க, நாம் பெறுவது

$$\mu(W\cos\alpha+W\cos\beta)=W(\sin\alpha-\sin\beta)$$
$$\therefore \mu=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$$

உதாரணம் 7

W_1, W_2 என்னும் எடைகளுடைய இரு பொருள்கள், ஒரு சாய் தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு, அத்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டோடு பொருந்துகின்ற ஓரிலேசான இழையினலே இணைக்கப் பட்டுள்ளன. அவற்றுள் உராய்வு குறைவான பொருளானது, மற்றைய தற்குக் கீழாக இருக்கின்றதெனக் கொண்டு, அப்பொருள்களுக்கும், தளத்திற்கும் இடையேயுள்ள உராய்வுக்கெழு முறையே μ_1, μ_2 ஆயின், அவ்விரு பொருள்களும் இயக்க நிலையிலிருக்கும்போது அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வைக் காண்க.

சாய்வு $\tan^{-1}\mu_1$ ஆக இருக்கும்போது கீழுள்ள பொருள் வழுக்கும். ஆனல், சாய்வு $\tan^{-1}\mu_2$ என்பதைப் பெறும் வரைக்கும் மேலுள்ள பொருள் அவ்வாறு செய்யாது. இரண்டும் ஒருங்கு கட்டுப்பட்டுள்ள தால் வழுக்குதலுக்குரிய சாய்வு இந்த இரண்டு பெறுமானங்களுக்கு இடையில் இருக்கும். அது θ ஆகுக, R_1, R_2 என்பன அப்பொருள் களின் செங்குத் தெதிர்த் தாக்கங்களாகுக. அன்றியும், T என்பது இழை யின் இழுவிசையாகுக.



படம்-101

$\mu_1 R_1$, $\mu_2 R_2$ என்னும் இரு உராய்வு களும் அத்தளத்தின் மீது மேன் முகமாகத் தாக்கும்.

W_1 இன் சமநிலைக்கு நாம் பெறுவன

$$W_1 \sin\theta = T + \mu_1 R_1$$

$$W_1 \cos\theta = R_1$$

ஆகவே, $T = W_1(\sin\theta - \mu_1\cos\theta)$ (i)

W_2 இன் சமநிலைக்கு நாம் பெறுவன

$$W_2 \sin\theta + T = \mu_2 R_2$$

$$W_2 \cos\theta = R_2$$

$$\therefore T = \mu_2 R_2 - W_2 \sin\theta = W_2(\mu_2\cos\theta - \sin\theta) \quad (2)$$

எனின், (1), (2) என்பனவற்றிலிருந்து

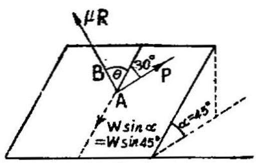
$$W_1(\sin\theta - \mu_1\cos\theta) = W_2(\mu_2\cos\theta - \sin\theta)$$

$$\therefore (W_1 + W_2)\sin\theta = (W_1\mu_1 + W_2\mu_2)\cos\theta$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{W_1\mu_1 + W_2\mu_2}{W_1 + W_2}$$

உதாரணம் 8

அடிவானத்திற்கு 45° சாய்வுள்ள உராய்வுடைய சாய்தளம் ஒன்றன் மீது ஒரு துகள் வைக்கப்பட்டு, அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாய் அத்தளத்தின் மிகப் பெரியச் சாய்வுக் கோட்டோடு 30° கோணத்தில் தாக்குகின்ற P என்னும் ஒரு விசையாலே தாக்கப்படுகின்றது. உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ஆகவும், சமநிலை எல்லை யுறுகின்றதாகவும் இருந்தால் அப் பொருள் இயங்கத் தொடங்கும் திசையைக் காண்க.



படம்-102

W என்பது அத் துகளின் எடையாகுக. R என்பது செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் ஆகுக.

அச்சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தான விசைகள் பூச்சியமாதல் வேண்டும்.

$$\therefore\ R = W\cos\alpha = W.\cos 45^\circ \quad (1)$$

எடையின் மற்றைக் கூறு, மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டின் மீது கீழ் முகமாகத் தாக்குகின்ற $W.\sin\alpha = W\sin 45^\circ$ ஆகும்.

μR என்னும் உராய்வு மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டோடு θ என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்ற AB என்னும் திசையில் தாக்குக. ஆகவே, அத்துகள் BAஐ நீட்டிய திசையில் இயங்கத் தொடங்கும்.

அத்தளத்தின் மேற்பரப்பின்மீது தாக்குகின்ற விசைகள் சமநிலையில் இருக்கின்றமையால், இலாமியினது தேற்றத்தால், நாம் பெறுவது

$$\frac{\mu R}{\sin 30^\circ} = \frac{W.\sin 45^\circ}{\sin(\theta + 30^\circ)} = \frac{P}{\sin\theta} \quad (2)$$

$$\therefore\ \sin(\theta + 30^\circ) = \frac{W.\sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\mu . R} = \frac{W\sin 45^\circ \sin 30^\circ}{\mu W\cos 45^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ}{\mu} = \frac{\sin 30^\circ}{1/\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \sin(\theta + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = (\sin 60^\circ) \quad (3)$$

$$\therefore\ \theta = 30^\circ$$

ஆகவே, அப்பொருள் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டோடு 30° என்னும் கோணத்தை ஆக்குகின்ற ஒரு திசையிலே அத்தளத்தின் மீது கீழ் முகமாக வழுக்கும்.

இப்பொழுது, விசை $P = \frac{\mu R \sin\theta}{\sin 30^\circ} = \frac{\mu R \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \mu R$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \times W.\cos 45^\circ = \frac{W}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}W}{6}$$

அவ்விசை எடையை விஞ்சும் நிலையில் இருந்தால், (3) ற்கு வேறொரு தீர்வு $\theta = 90^\circ$ ஆக இருக்கின்றமையால் μR என்னும், உராய்வு விசை கிடையாகத் தாக்கு மென்றும், அது பற்றி அத்துகள் கிடைத் திசையில் இயங்கத் தொடங்கு மென்றும், Pயினது ஒத்த பெறுமானம்,,

$$= \frac{\mu R.\sin\theta}{\sin 80^\circ} = \frac{\mu R \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} W \frac{1}{\sqrt{2}} / \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} W = \frac{\sqrt{6}}{3} W \text{ ஆகும்.}$$

பயிற்சி 9·1

1. உராய்வுக் கெழு μ ஆக உள்ள உராய்வுடைய கோளத்தின் வெளிப் பரப்பின் மீது ஒரு துகள் வைக்கப்படுகின்றது. அத்துகளி லிருந்து மையத்திற்கு வரையும் ஆரை, நிலைக்குத்தோடு $\tan^{-1}\mu$ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும்போது, அத்துகள் இயக்க நிலையில் இருக்கு மெனக் காட்டுக.

2. 40 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருள் ·25 என்னும் உராய்வுக் கெழுவுடைய மழுமழுப்பற்ற கிடைத் தள மொன்றின்மீது இருக்கின்றது; கிடையாகத் தாக்கி, அப்பொருளை இயக்கும் மிகச் சிறிய விசையைக் காண்க.

கிடைத் தளத்தோடு $\cos^{-1}\frac{3}{5}$ என்னும் கோணத்தில் தாக்கி, அப் பொருளை இயக்கும் மிகச் சிறிய விசையையும் காண்க.

ஒவ்வொரு வகையிலும் அத்தளத்தின் விளை வெதிர்த் தாக்கத் தினுடைய திசையையும் அளவையும் காண்க.

3. அடி வானத்திற்கு உராய்வுடைய சாய்தளத்தின் சாய்வுக் கோணம் $\cos^{-1}\frac{12}{13}$. உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{3}$ ஆயின், அத்தளத்திற்குச்

சமாந்தரமாய்த்தாக்கி, அத்தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்ட 52 கிலோ கிராம் எடையைத் தாங்கும் மிகக் குறைந்த விசையையும், அத்தளத்தின்மீது மேன் முகமாக அப்பொருளை இயக்கத் தொடங்கும் விசையையும் காண்க.

4. ஒரு சாய்தளத்தின் அடியின் நீளம் 80 செ.மீ; உயரம் 60 செ.மீ; அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்ற, 8 கிலோ கிராம் விசை, 20 கிலோ கிராம் எடையொன்றை வழுக்குதலினின்று மட்டாகத் தடுக்கும் உராய்வுக் கெழுவைக் காண்க.

5. 2 கிலோ கிராம் எடையுள்ள ஒரு பொருள் 30° சாய்வுள்ள உராய்வுடைய தளமொன்றின் மீது எல்லைச் சமநிலையிற் கிடக்கின்றது. அத்தளம் 60° சாய்விற்கு உயர்த்தப்பட்டால், அத்தளத்தினது நீளவாட்டில் அப்பொருளைத் தாங்கும் பொருட்டு வேண்டிய விசையைக் காண்க.

6. 15 கிலோ கிராம் எடையானது, உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின்மீது மட்டமாக ஓய்விற் கிடக்கின்றது. அத்தளத்தின் உயரம் அதன் நீளத்தில் 3/5 பாகம் ஆகும். அத்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாய்த் தாக்கி, அந்த எடையை அத்தளத்தின் மீது மேன் முகமாகவும், மட்டாகவும் இயக்கத் தொடங்கும் விசையின் அளவைக் காண்க.

7. 30 கிலோ கிராம் எடையானது, உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்திற்குச் சமாந்தரமாகத் தாக்குகின்ற 12 கிலோ கிராம் விசையாலே தாக்கப்படும்போது, அது அத் தளத்தின்மீது கீழ் முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்கின்றது. தளத்திற்கு இணையாக 18 கிலோ கிராம் விசையால் தாக்கப்படும்போது, அது அத்தளத்தின்மீது மேன் முகமாக இயங்கு நிலையில் இருக்கும் உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

8. W என்னும் ஒரு எடை அடிவானத்திற்கு 45° சாய்ந்த உராய்வுடைய தளத்தின்மீது $\left(\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ வைக்கப்பட்டு, அத்தளத்தினது உச்சியிலுள்ள மழமழப்பான வளையம், Aயின் வழியாகச் செல்கின்ற ஓரிழையினாலே நிலைக்குத்தாகத் தொங்குகின்ற P என்னும் ஒரு எடையோடு இணைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. $W=3P$ ஆகவும், θ என்பது அத்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டுடன் இழை AW ஆல் இயலும் மிகப் பெரிய சாய்வாகவும் இருந்தால், $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ எனக் காட்டுக.

W இயங்கத் தொடங்கும் திசையையும் காண்க.

9. பாரமான Pஎன்னும் ஒரு துகள் அடிவானத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்த உராய்வுடைய ஒரு தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு, ஈர்க்கப்பட்ட ஓர் இலேசான இழை APயினால், அத்தளத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி Aயிற்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளது. AB என்பது அத்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோடாகவும், அத் துகள் வழுக்குநிலையில் இருக்கும் போது PAB என்னும் கோணம் θ ஆகவுமிருந்தால், $\sin\theta=\mu\cot\alpha$ எனக் காட்டுக.

$\mu\cot\alpha>1$ எனின், விடையை விளக்குக

10. W எடையுடைய ஒரு சீரான கோள மொன்று, அடிவானத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்த உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின் மீது அக்கோளத்தின் பரிதிக்குத் தொடு கோட்டு வழியாகச் செயல்படும் $\frac{1}{2}W\sin\alpha$ என்னும் அளவுடைய விசையினால் சமநிலையில் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அவ்விசை சாய் தளத்திற்கு இணையாகச் செயல்பட வேண்டு மென்றும், உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2}\tan\alpha$ விற்குக் குறைய முடியா தென்றும் காட்டுக.

11. அடி வானத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்த உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின்மீது, ஒரு பாரமான சங்கிலியின் a அடி நீளமுள்ள ஒரு பகுதி அச்சாய்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டின் நீளவாட்டில் கிடக்கவும், அதன் மீதியுள்ள b அடிநீளம் அச்சாய் தளத்தின் உச்சியின் மேலாகச் சென்று, நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும்படியும் வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. அச்சங்கிலி வழுக்கத்தொடங்கும் நிலையில் இருந்தால், $b=0$ அல்லது $2a\sin\alpha$ எனக் காட்டுக.

12. ஒரு பார மேற்றும் ரயில் பெட்டி, αசாய்வுள்ள ஒரு சாய்வின் மீது, அதன் சக்கரங்களின் கீழ்ப் பகுதி பூட்டப்பட்டு ஓய்வில் இருக்கிறது. தண்டவாளத்தின் தளத்திலிருந்து அப்பெட்டியின் புவி யீர்ப்பு மையத்தின் உயரம் h ஆகவும், கீழ்ச் சக்கரங்களின் இருசிலிருந்தும், மேல் சக்கரங்களின் இருசிலிருந்தும், சாய்வுக்கு இணையாக அளக்கப்பட்ட அப்புவி யீர்ப்பு மையத்தினுடைய தூரங்கள் முறையே a, b ஆகவு மிருந்தால், சக்கரங்களுக்கும், தண்டவாளத்திற்கும் இடையே உள்ள உராய்வுக் கெழு $\frac{a+b}{h+b\cot\alpha}$ என்பதற்குக் குறையா தெனக் காட்டுக.

13. ஒவ்வொன்றும் W எடையுடைய இரு வேறு பொருள்கள் ஒரு சாய்தளத்தின்மீது வைக்கப்பட்டு, அத்தளத்தின் மிகப் பெரிய

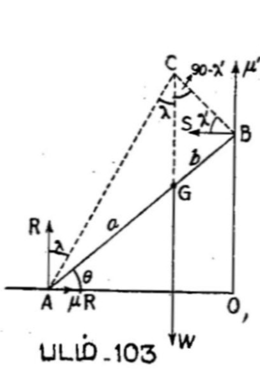
சாய்வுக் கோட்டோடு பொருந்துகின்ற ஓர் இலேசான இழையினாலே இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள், உராய்வு குறைவான பொருள் மற்றையதற்குக் கீழாய் இருக்கின்ற தெனக் கொண்டு அப்பொருள் களுக்கும், தளத்திற்கு இடையே யுள்ள உராய்வுக் கெழு முறையே 1/3, 2/3 ஆயின், அவ்விரு பொருள்களும் இயக்க நிலையிலிருக்கும்போது, அடி வானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வையும், இழையின் இழு விசையை யும் காண்க.

14. W என்னும் ஒரு எடை, அடி வானத்திற்கு α கோணத்தில் சாய்ந்த உராய்வுடைய சாய் தளத்தின் மீது கிடக்கின்றது. உராய்வுக் கெழு $2 \tan \alpha$. அப்பொருள், அத்தளத்தின்மீது இயக்கும் மிகச்சிறிய கிடை விசை $\sqrt{3}\, W \sin \alpha$ என்றும், அப்பொருள் அத்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டிற்கு 60° யில் சாய்ந்த ஒரு திசையில் இயங்கத் தொடங்கு மென்றும் காட்டுக.

15. ஒரு சாய்தளத்தின் மீது தம் உராய்வுக்கெழு முறையே $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}$ ஆகவுள்ள மூன்று சமபொருள்கள் விறைப்பாக ஒருங்கு தொடுக்கப் பட்டு வழுக்காது கிடத்தற்கு, அடி வானத்திற்கு அத்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோணம் $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ எனக் காட்டுக.

12. உதாரணம் 1

தன் புவி யீர்ப்பு மையத்தால் a, b என்னும் நீளங்களுடைய இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கப்பட்ட ஓரேணி, தன்னுடைய முனையொன்று உராய்வுடைய கிடைத் தளம் ஒன்றன் மீது இருக்கவும், மற்றை முனை உராய்வுடைய நிலைக்குத்துச் சுவர் ஒன்றிற்கு எதிராகக் கிடக்கவும் ஓய் விலிருக்கின்றது. தரையிலும், சுவரிலிலும் உள்ள உராய்வுக் குணகம் முறையே μ, μ' என்பனவாயின், சமநிலை எல்லையுறும்போது, தரைக்கு ஏணியின் சாய்வு $\tan^{-1} \dfrac{a-b\,\mu\mu'}{\mu\,(a+b)}$ எனக் காட்டுக.



படம் - 103

AB என்பது ஏணியையும், G என்பது அதன் புவி யீர்ப்பு மையத்தையும் குறிக் கட்டும்.

அப்பொழுது $AG=a$; $GB=b$ ஆகும். R, S என்பன முறையே A, B என்பனவற்றிலுள்ள செங்குத் தெதிர்த் தாக் கங்கள் ஆகுக, அவ்வேணியின் முனை A என்பது சுவரிலிருந்து வழுக்கு நிலையில் இருக்கின்றது. எனின், μR என்னும் உராய்வு, சுவர் முகமாக இருக்கும். முனை B என்பது நிலைக்குத்திற் கீழ் முகமாக இயங்கு நிலையில்

இருக்கின்றது ஆகவே, $\mu' S$ என்னும் உராய்வு, மேன் முகமாகத் தாக்கும். தரைக்கு அவ்வேணியின் சாய்வை θ எனக் குறிப்போம். விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் பிரிக்க நாம் பெறுவன

$$\mu R = S \quad (1)$$

$$R + \mu' S = W \quad (2)$$

அன்றியும், A பற்றித் திருப்புத் திறன்கள் எடுக்க நாம் பெறுவது

$$W. a \cos\theta = \mu' S(a+b)\cos\theta + S\,(a+b)\sin\theta \quad (3)$$

$$\therefore\ Wa = \mu' S(a+b) + \mu R(a+b)\tan\theta$$

(அ-து) $(R+\mu' S)a = \mu' S(a+b) + \mu R(a+b)\tan\theta$

(அ-து) $(R+\mu\mu' R)a = \mu\mu' R(a+b) + \mu R(a+b)\tan\theta$

$$\therefore\ (1+\mu\mu')a = \mu\mu'(a+b) + \mu(a+b)\tan\theta$$

$$\therefore\ \mu(a+b)\tan\theta = (1+\mu\mu')a - \mu\mu'(a+b)$$

$$= a - \mu\mu' b$$

$$\therefore\ \tan\theta = \frac{a - \mu\mu' b}{\mu(a+b)}$$

வேறுவழி

λ, λ' என்பன A, B யில் உள்ள உராய்வுக் கோணங்களாகுக. A யிலுள்ள செங்குத்தோடு λ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்கும் AC என்பதையும், Bயிலுள்ள செங்குத்தோடு λ' என்னும் கோணத்தை உண்டாக்கும் BC என்பதையும் படத்தில் காட்டியபடி வரைக

AC, BC என்பன A, B என்பனவற்றிலுள்ள விளை வெதிர்த் தாக்கங்களுடைய திசைகளாகும்.

இப்பொழுது, ஏணி இவ் விளை வெதிர்த் தாக்கங்களாலும், தன் எடையாலும் சமநிலையில் இருக்கின்றது.

எனின், அவற்றினுடைய திசைகள் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்.

ஆகவே, G வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு C வழிச் செல்லல் வேண்டும்.

இப்பொழுது, $\angle CGB = 90 - \theta;\ ACG = \lambda;$

$\angle BCG = 90 - \lambda'$

இனி, அதிகாரம் 7, பிரிவு 3லுள்ள கோண கணிதத் தேற்றம் (i) இன்படி,

$$(a+b)\cot\angle CGB = a\cot\angle ACG - b\cot\angle BCG$$

(அ-து) $(a+b)\cot(90-\theta) = a\cot\lambda - b\cot(90-\lambda')$

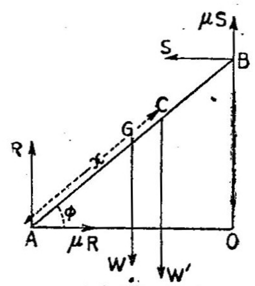
(அ-து) $(a+b)\tan\theta = a\cot\lambda - b\tan\lambda'$

$$(a+b)\tan\theta = \frac{a}{\mu} - b\mu' = \frac{a - b\mu\mu'}{\mu}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a+b)}$$

உதாரணம் 2

ஒரு சீரேணி யொன்று ஒரு சுவருக்கு எதிராக வைக்கப்படுகிறது. தரையும் சுவரும் உராய்வுடைய தன்மையிற் சமமுறின், உராய்வுக் கெழு $\tan\theta$ ஆக இருக்கும்போது, நிலைக்குத்திற்கு ஏணியின் எல்லைச் சாய்வு 2θ எனக் காட்டுக. அவ்வேணி இந்நிலையில் இருக்கும்போது, அது வழுக்காதவாறு ஏறக்கூடுமா ?



படம்-104

தரையுடன் ஏணியின் சாய்வு ϕ எனக் கொள்க. ஏணியின் நீளம் 2a என்க. ஏணி சீரானதால், அதன் எடை மையத்தில் தாக்கும். மேல் உதாரணம் (i) இல் உள்ள விடையில்,

$a = b$; $\mu = \mu'$ எனப் பிரதியிட நாம் பெறுவது

$$\tan\phi = \frac{a(1-\mu^2)}{2\mu a} = \frac{1-\mu^2}{2\mu}$$

$$= \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \cot 2\theta = \tan(\pi/_2 - 2\theta)$$

$$\therefore \phi = \pi/_2 - 2\theta$$

ஆகவே, நிலைக்குத்துடன் ஏணியின் எல்லைச் சாய்வு 2θ ஆகும்.

ஏணியின் எடை W ஆகுக.

இந்நிலையில் W′ எடையை மனிதன் ஏணியின் மீது அது வழுக்காத வாறு ஏறக்கூடிய தூரம் x ஆகட்டும். விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக் குத்தாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\mu R = S \quad (1)$$

$$R + \mu S = W + W' \quad (2)$$

A பற்றிய விசைகளின் திருப்புத் திறனை எடுக்க நாம் பெறுவது

$$W.\ a\cos\phi + W'.\ x\cos\phi = S\ 2a\sin\phi + \mu S\ 2a\cos\phi \quad (3)$$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{S}{\mu} + \mu S = W + W'$$

$$\frac{S(1+\mu^2)}{\mu} = W + W'$$

$$\therefore\ S = \frac{(W+W')\mu}{1+\mu^2} = \frac{(W+W')\tan\theta}{\sec^2\theta}$$

$$\therefore\ S = (W+W')\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore\ \mu S = (W+W')\sin^2\theta$$

(3) லிருந்து, நாம் பெறுவது

$$W\ a + W'\ x = S.\ 2a\tan\phi + \mu S.\ 2a$$

$$= (W+W')\sin\theta\cos\theta\ 2a.\ \cot 2\theta + (W+W')\sin^2\theta.\ 2a$$

$$= (W+W')a\cos 2\theta + (W+W')\ 2a\sin^2\theta$$

$$= (W+W')a\cos 2\theta + (W+W')a(1-\cos 2\theta)$$

$$= (W+W')a$$

$$\therefore\ W'x = W'a$$

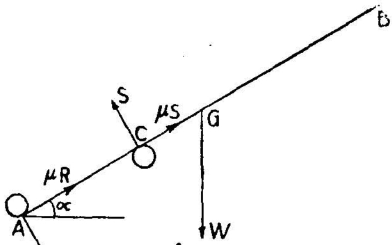
$$\therefore\ x = a$$

ஆகவே, அவ்வேணி வழுக்காதவாறு அதன் மையம் வரை ஏறக் கூடும்.

உதாரணம் 3

இரு கிடை முனைக்கட்டைகளுள், ஒன்றன் மேலும், மற்றையதன் கீழுமாகப் பாரமுள்ள ஒரு சீர்க்கோலொன்று ஒரு நிலைக்குத் தளத்திலே

கிடக்கும்படி வைக்கப்படுகிறது. 'a' என்பது அம் முளைக்கட்டை களுக்கு இடையேயுள்ள தூரமாயும் α என்பது அடி வானத்திற்கு அவற் றைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சாய்வுக் கோணமாயும், λ என்பது உராய் வுக் கோணமாயும் இருந்தால், அந்நிலையில் ஓய்விலிருக்கத்தக்க மிகக் குறுகிய கோலினது நீளம் $a\,(1+\tan\alpha\cot\lambda)$ எனக் காட்டுக.



படம்-105

A, C என்பன இரு முளைக் கட்டைகளைக் குறிக்கட்டும். இவற்றுள் A கீழிருக்கட்டும். கோலானது Aயிற்கு அடியிலும், Cயிற்கு மேலுமாக இருந்தால், கோலின் புவியீர்ப்பு மையம் G என்பது ACக்கு மேல் இருக்க வேண்டும். இல்லா விடில், Aயில் அழுத்தமில்லாமல் கோலானது C பற்றிச் சுழலும். கோலின் ஒரு முனை Aயிற்குச் சரியாக அடியில் இருந்து வழுக்கத் தொடங்கு நிலையில் இருக்கும்போது பெறப் படும் கோலே மிகச் சிறியதாகும்.

A, C என்பனவற்றிலுள்ள எதிர்த் தாக்கங்கள் முறையே R, S ஆகுக. உராய்வுக் கெழு μ எனில், இப்புள்ளிகளில் உள்ள உராய்வு விசைகள் μR, μS என்பனவாகும். விசைகளைக் கோலின் வழியாகவும், அதற்குச் செங்குத்தாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$S = R + W\cos\alpha \quad (1)$$

$$\mu R + \mu S = W\sin\alpha \quad (2)$$

A பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$S.a = W.\ AG.\ \cos\alpha \quad (3)$$

(1), (2) இவற்றிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$2\mu S = W\,(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$$

ஆகவே, (3) லிருந்து

$$AG = \frac{a}{\cos\alpha}\cdot\frac{S}{W} = \frac{a}{\cos\alpha}\cdot\frac{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{2\mu}$$

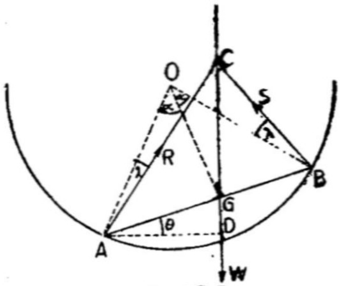
$$= \frac{a}{2}\,(1+\tan\alpha\cot\lambda)$$

ஆகவே கோலின் நீளம் $= 2AG = a(1+\tan\alpha\cot\lambda)$

உதாரணம் 4

ஒரு சீர்க் கோலொன்று உராய்வுடைய குழிக் கோள மொன்றுக் குள்ளே எல்லைச் சமநிலையிற் கிடக்கின்றது. அக்கோல், அக்கோள மையத்தில் 2α என்னும் கோணத்தை எதிரமைக்க, λ என்பது உராய்வுக் குணகமாயின், அடி வானத்திற்கு அக்கோலின் சாய்வுக் கோணம்.

$$\tan^{-1}\left[\frac{\tan(\alpha+\lambda)-\tan(\alpha-\lambda)}{2}\right]$$ எனக் காட்டுக.



படம். 106

AB என்பது அக்கோலாகவும், G என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மைய மாகவும், O என்பது அக்கோள மைய மாகவு மிருக்க.

ஆயின், $\angle GOA = \angle GOB = \alpha$

A, B என்பன வற்றின் வழியாக AO, BO என்னும் கோடுகளுடன் λ என்னும் கோணத்தை உண்டாக் குகிற AC, BC என்னும் கோடுகளை வரைக.

இவ்வதிகாரம், பிரிவு 6 இன்படி, இவை முறையே A, B என்பன வற்றிலுள்ள விளை வெதிர்த் தாக்கங்களினுடைய திசைகளாகும்.

இவ்வெதிர்த் தாக்கங்களும், எடையும் அக்கோலைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கின்றமையால், G வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு C வழியாகச் செல்ல வேண்டும். A வழியாக CG என்பதை D யில் சந்திக்கும்படி, AD என்னும் கிடைக் கோட்டை வரைக.

$$\angle GAD = \theta \text{ ஆகுக.}$$

இப்பொழுது, $\angle CAG = \angle OAG - \lambda = 90° - \alpha - \lambda$

$$\angle CBG = \angle OBG + \lambda = 90° - \alpha + \lambda$$

எனின், அதிகாரம் 7, பிரிவு 3இலுள்ள கோண கணிதத் தேற்றம் (ii) இன்படி,

$$(a+a)\cot\angle CGB = a\cot\angle CAB - a\cot\angle CBA$$

$$2a\cot(90° - \theta) = a\cot(90° - \alpha - \lambda) - a\cot(90° - \alpha + \lambda)$$

$$2a\tan\theta = a\tan(\alpha+\lambda) - a\tan(\alpha-\lambda)$$

$$(\text{அ-து})\ \tan\theta = \frac{\tan(\alpha+\lambda)-\tan(\alpha-\lambda)}{2}$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\left[\frac{\tan(\alpha+\lambda)-\tan(\alpha-\lambda)}{2}\right]$$

குறிப்பு : $\theta=\tan^{-1}\dfrac{\sin 2\lambda}{\cos 2\alpha+\cos 2\lambda}$ என்றும் காட்டலாம் மேலே பெற்றது.

$$\tan\theta=\frac{\tan(\alpha+\lambda)-\tan(\alpha-\lambda)}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin(\alpha+\lambda)}{\cos(\alpha+\lambda)}-\dfrac{\sin(\alpha-\lambda)}{\cos(\alpha-\lambda)}}{2}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\lambda)\cos(\alpha-\lambda)-\cos(\alpha+\lambda)\sin(\alpha-\lambda)}{2\cos(\alpha+\lambda)\ \cos(\alpha-\lambda)}$$

$$=\frac{\sin 2\lambda}{2\cos(\alpha+\lambda)\cos(\alpha-\lambda)}=\frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\alpha+\cos 2\lambda}$$

$$\therefore\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sin 2\lambda}{\cos 2\alpha+\cos 2\lambda}\right) \text{ ஆகும்,}$$

உதாரணம் 5

2a நீள முள்ள ஒரு பாரமான கோல், உராய்வுடைய சுவருக்கு எதிராய் ஒரு முனை சாய்ந்திருக்க, உராய்வுடைய ஒரு முளைக்கட்டையின்மீது கிடக்கின்றது. C என்பது அச்சுவரிலிருந்து முளைக்கட்டையினது தூரமாயும், λ என்பது முளைக்கட்டை, சுவர் என்னும் இரண்டிலு முள்ள உராய்வுக் கோணமாயும் இருந்தால், அக்கோல் அச்சுவரைத் தொடும் புள்ளி அம்முளைக்கட்டைக்கு மேலாக இருக்கும்போது, θ என்பது அச்சுவருக்கு அக்கோலின் சாய்வாயின்,

$$\sin^3\theta = \frac{c}{a}\cos^2\lambda \text{ ஆகும் பொழுது,}$$

அக்கோல் கீழ் முகமாக வழுக்கு நிலையில் இருக்குமெனக் காட்டுக.

அக்கோல் அச்சுவரைத் தொடும் புள்ளி அம்முளைக்கட்டைக்குக் கீழாக இருந்தால்,

$$\sin^2\theta \sin(\theta+2\lambda)=\frac{c}{a}\cos^2\lambda$$ ஆகும் பொழுது,

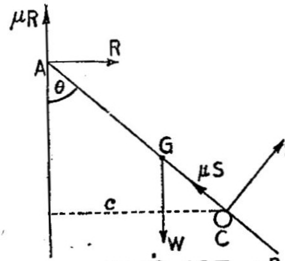
அக்கோல் கீழ் முகமாக வழுக்கு நிலையில் இருக்கு மென்றும்,

$$\sin^2\theta \sin(\theta-2\lambda)=\frac{c}{a}\cos^2\lambda$$ என்று ஆகும்பொழுது, அக்

கோல் மேன் முகமாக வழுக்கு நிலையில் இருக்கு மென்றும் நிறுவுக

வகை 1

AB என்பது கோலையும், C என்பது முளைக்கட்டையையும் குறிக்கட்டும்.



படம் 107

A, C என்ற புள்ளிகளில் எதிர்த் தாக்கங்கள் R, S என்பனவாகுக. உராய்வு விசைகள் μR, μS என்பன. படத்தில் காட்டியபடி செயல்படும். கோலின் எடை W ஆகட்டும்.

விசைகளை நிலைக்குத்தாகவும், கிடையாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$\mu R+S(\mu\cos\theta+\sin\theta)=W \quad (1)$$

$$R=S(\mu\sin\theta-\cos\theta) \quad (2)$$

A பற்றித் திருப்புத் திறன் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$S.\, c\operatorname{cosec}\theta = W.\, a\sin\theta \quad (3)$$

(1), (2) லிருந்து நாம் பெறுவது

$$W=S(\mu^2+1)\sin\theta$$

ஆகவே, (3) லிருந்து

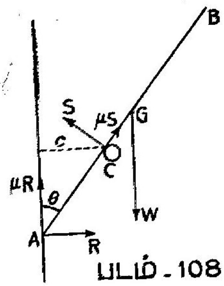
$$c\operatorname{cosec}\theta=a\sin^2\theta\,(\mu^2+1)$$

$$=a\sin^2\theta\sec^2\lambda$$

$$\therefore \sin^3\theta=\frac{c}{a}\cos^2\lambda$$

வகை 2

முன்போல, விசைகள் நிலைக்குத்தாகவும், கிடையாகவும், பிரிக்க, நாம் பெறுவது



படம் - 108

$\mu R+S(\mu\cos\theta+\sin\theta)=W$ (i)

$R=S(\cos\theta-\mu\sin\theta)$ (ii)

$\therefore W=S\,[2\mu\cos\theta+(1-\mu^2)\sin\theta]$

A பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$S.\,c\operatorname{cosec}\theta=W.\,a\sin\theta$

ஆகவே, $\frac{c}{a}\operatorname{cosec}^2\theta=2\mu\cos\theta+(1-\mu^2)\sin\theta$

$$=2\tan\lambda\cos\theta+\frac{(\cos^2\lambda-\sin^2\lambda)}{\cos^2\lambda}\sin\theta$$

$$=[2\sin\lambda\cos\lambda\cos\theta+\cos2\lambda\sin\theta]\sec^2\lambda$$

$$=(\sin2\lambda\cos\theta+\cos2\lambda\sin\theta)\sec^2\lambda$$

$$=\sin(\theta+2\lambda)\sec^2\lambda$$

$$\therefore\frac{c}{a}\cos^2\lambda=\sin^2\theta\sin(\theta+2\lambda)$$

குறிப்பு: மேல் வகையில், μவின் குறியை (அ-து)λ வின் குறியை மாற்றியமைக்க வகை (3) இன் விடை கிட்டும்.

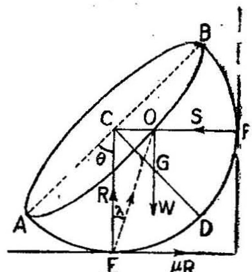
உதாரணம் 6

ஓரினத் திண்ம அரைக் கோள மொன்று உராய்வுடைய ஒரு கிடைத்தளத்தின் மீதும், மழுமழுப்பான ஒரு சுவருக் கெதிராயும் கிடக்கின்றது. உராய்வுக் கெழு $\frac{3}{8}$ லும் பெரிதாயின், அவ்வரைக் கோளம் எந்த ஒரு திசையிலும் ஓய்வில் இருக்குமென்றும், அதைவிடச் சிறிதாயின், நிலைக்குத்தோடு அவ்வரைக் கோளத்தின் அடி உண்டாக்கக்கூடிய மிகச்சிறிய கோணம் $\cos^{-1}\frac{8\mu}{3}$ என்று காட்டுக.

அச்சுவரும் உராய்வுடையதாயின் (உராய்வுக் கெழு μ')

இக்கோணம் $\cos^{-1}\left(\frac{8\mu}{3}\cdot\frac{1+\mu'}{1+\mu\mu'}\right)$ ஆகுமென்றும் காட்டுக.

அரைக் கோணத்தின் ஆரையை r என்றும், அது கிடைத் தளத்தையும், சுவரையும் தொடும் புள்ளிகளை E, F என்றும், அரைக் கோளத்தின் அடிப் பாகத்தின் மையத்தை C என்றும்; அந்த அடிப் பாகத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் ஆரையை CD என்றும், அதன் புவி யீர்ப்பு மையத்தை G என்றும் குறிப்பிடுவோம்.



படம் - 109

எனின், $CG = \frac{3}{8} CD = \frac{3}{8} r$

E, F என்ற புள்ளிகளில் உள்ள செங்குத் தெதிர்த் தாக்கங்களை முறையே R, S எனக் குறிப்பிடுவோம்.

E யில் உள்ள உராய்வு விசை μR என்பது படத்தில் காட்டியபடி செயல்படும்.

G வழியாக நிலைக்குத்தாகச் செயல்படும் W என்ற விசையும், F வழியாகச் சுவருக்குச் செங்குத்தாகச் செயல்படும் S என்ற சுவரின் எதிர்த் தாக்கமும் O வில் சந்திக்கட்டும். இப்பொழுது. E யில் செயல்படும் R, μR என்ற விசைகளின் சேர்க்கையான விளைவெதிர்த் தாக்கமும் இப்புள்ளி O வழிச் செல்ல வேண்டும்.

எனவே, EO என்பது E யிலுள்ள விளை வெதிர்த் தாக்கத்தின் திசையாகும்.

$$\therefore \angle CEO = \lambda$$

அன்றியும், அரைக் கோளத்தின் அடி நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் θ எனின்,

படத்தில் $\angle ACE = \theta$ ஆகும்

$$\therefore \angle OCG = \theta$$

$$\therefore CO = CG \cos\theta = \frac{3}{8} r \cos\theta$$

அன்றியும், CEO என்னும் முக்கோணத்திலிருந்து,

$$CO = CE \tan\lambda = r \tan\lambda$$

இப்பொழுது, CO வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு, $\angle CEO = \lambda$ என்னும் போது உண்டாகும்.

படத்தில் எல்லையுறு நிலையில் படம் வரைந்திருப்பதால்

$\angle CEO = \lambda$ ஆகும்.

(இதர நிலைகளில், உராய்வு விசை எல்லை யுறாத காரணத்தால் μR க்குக் குறையும். எனவே, $\angle CEO$ என்பது λ விற்குக் குறையும்.)

எனவே, CO வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $= r \tan \lambda$

(அ-து) $\frac{3}{8} r \cos \theta$ வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $= r \tan \lambda$

,, $\frac{3}{8} r \cos \theta$ வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $= r \mu$

,, $\frac{3}{8} \cos \theta$ வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $= \mu$

,, $\cos \theta$ வின் மிகப் பெரிய மதிப்பு $= \frac{8\mu}{3}$

$\therefore$ θ வின் மீச்சிறு மதிப்பு $= \cos^{-1}\left(\frac{8\mu}{3}\right)$

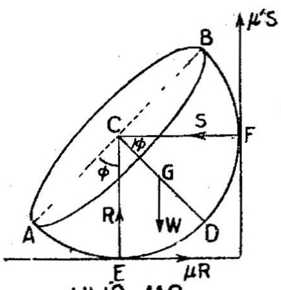
[ஏனெனில், θ என்பது குறையக்குறைய, $\cos \theta$ வின் மதிப்பு அதிகரிக்கும்.]

$\mu < \frac{3}{8}$ ஆக இருக்கும்வரை, நாம் θ விற்கு மெய்ம் மதிப்புப்பெறலாம்.

ஆனால், $\mu > \frac{3}{8}$ எனின், θ வின் இந்த எல்லை மதிப்புக் காண முடியாது.

(அ-து) θ விற்கு எல்லை மதிப்பென்று ஒன்று இல்லை.

ஆகவே, கோளம் எந்நிலையிலும் ஒய்விலிருக்கும்.



படம் - 110

இரண்டாவது வகையில், அரைக் கோளத்தின் அடி நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம் ϕ என்க. E, F என்பவற்றிலுள்ள எதிர்த் தாக்கங்களை முறையே R, S எனக் குறிப்போம். இப்புள்ளிகளிலுள்ள உராய்வு விசைகள் முறையே μR, $\mu' S$ என்பனவாகும். இவை, படத்தில் காட்டியபடி முறையே சுவரை நோக்கியும். நிலைக்குத்தாகவும் செயல்படும்.

விசைகளை நிலைக்குத்தாகவும், கிடையாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன.

$$S=\mu R \quad (1)$$

$$R+\mu' S=W \quad (2)$$

அன்றியும், C பற்றி விசைகளின் திருப்புத் திறன்களைக் காண நாம் பெறுவது

$$(\mu R+\mu' S)\, r=W \cdot \frac{3}{8}\, r\cos\phi \quad (3)$$

(2) லிருந்து, $\mu R+\mu\mu' S=\mu W$

(அ-து) $S+\mu\mu' S=\mu W$

$\therefore\ S(1+\mu\mu')=\mu W$

$$\therefore\ S=\frac{\mu W}{1+\mu\mu'}$$

(3) லிருந்து, $(S+\mu' S)=W\frac{3}{8}\cos\phi$

$$S(1+\mu')=W.\ \frac{3}{8}\cos\phi$$

S இன் மதிப்பை இதில் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{\mu W}{1+\mu\mu'}(1+\mu')=W.\frac{3}{8}\cos\phi$$

$$\therefore\ \cos\phi=\frac{8\mu(1+\mu')}{3(1+\mu\mu')}$$

பயிற்சி 9.2

5,2 மீட்டர் நீளமான ஒரு ஏணி யொன்றின் ஒரு முனை, மழ மழப்பான ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக் கெதிராயும், மற்றை முனை உராய்வுடைய கிடைத் தளத்தின்மீது அச்சுவரிலிருந்து 2 மீட்டர் தூரத்திலும், இருக்கும்படி வைக்கப்பட்டு ஓய்விலிருக்கின்றது. அவ்வேணியின் எடை 28 கிலோ கிராம் ஆயின், அவ்வேணிக்கும் தரைக்கும் இடையேயுள்ள உராய்வைக் காண்க.

2, ஒரு ஏணியொன்றின் ஒரு முனை ஒரு கிடைத் தரையின் மீதும் மற்றை முனைஒரு நிலைக்குத்துக் சுவருக் கெதிராயும் ஓய்விலிருக்கின்றது.

உராய்வுக் கெழு முறையே $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{3}$ என்பனவாகும்.

அவ்வேணி வழுக்கத் தொடங்கும் போது அதன் சாய்வைக் காண்க.

3. ஒரு முனை உராய்வுடைய ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீதும்,மற்றை முனை மழமழப்பான சுவருக்கெதிராகவும் இருக்க, ஒரு சீரேணி யொன்று எல்லைச் சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. பின்னர், ஒரு மனிதன் அவ் வேணியில் ஏறுகின்றான், அவன், அதன் அரைப் பங்களவு தூரத்திற்கு மேல் ஏறமாட்டான் எனக் காட்டுக.

4. 70 அடி நீளமுள்ள ஒரு சீரேணி யொன்று ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கு எதிராக அதனோடு 45° கோணச் சாய்வில் ஓய்வில் இருக்கின்றது. அவ்வேணிக்கும், சுவருக்கும் இடையே யுள்ள உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{3}$ ஆகவும், அவ்வேணிக்கும் தரைக்கும் இடையே யுள்ளது $\frac{1}{2}$ ஆகவும் இருக்கின்றன. அவ்வேணி எடையின் அரைப் பங்கு எடையுள்ள ஒரு மனிதன் அவ்வேணியில் ஏறினானாயின், அவ்வேணி வழுக்கும் போது அவன் எவ்வளவு உயரத்தில் இருப்பான் ?

இப்பொழுது, ஒரு பையன் ஏணியின் கீழ்ப் படியில் நின்றால், அவன் குறைந்த அளவு என்ன எடையுடையவானாயிருந்தால் அந்த மனிதன் ஏணியின் உச்சிக்கு ஏறக்கூடும்?

5. $2l$ நீளமுள்ள ஒரு ஏணி, ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவரையும், ஒரு கிடைத் தளத்தையும் தொடும்படி வைக்கப்படுகிறது. ஒவ்வொரு தொடு புள்ளியிலும் உராய்வுக் கோணம் λ ஆகும். ஏணியின் எடை அதன் மையப் புள்ளிக்குக் கீழ் kl தூரத்திலுள்ள ஒருபுள்ளியில் செயல்பட்டால், அவ்வேணியின் எல்லைச்சாய்வு θ என்பது $\cot\theta = \cot 2\lambda - kr \operatorname{cosec} 2\lambda$ என்னும் சமன்பாட்டால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

6. தன் மேல் முனை உராய்வுடைய ஒரு நிலைக்குத்துச் சுவருக்கெதிராயும்,தன் கீழ்முனை தரையின்மீதும் இருக்க, ஒரு சீரேணி யொன்று அடி வானத்திற்கு 45° என்னும் கோணத்தில் கிடக்கின்றது. μ என்பது ஏணிக்கும், தரைக்குமிடையே யுள்ள உராய்வுக் குணகமாகவும், μ' என்பது எணிக்கும் சுவருக்கு மிடையே யுள்ள உராய்வுக் குணகமாகவும் இருந்தால், கீழ் முனையைச் சுவர் முகமாக இயக்கும் மிகக் குறைந்த கிடை விசை $\frac{1}{2} W \dfrac{1+2\mu - \mu\mu'}{1-\mu'}$ எனக் காட்டுக.

7. AB என்னும் பாரமான ஒரு சீர்க் கோலொன்றின் ஒரு முனை ஒரு வளையத்தாலே AC என்னும் உராய்வுடைய கிடைக் கோலுக்கு இணைக்கப்பட்டு அதன்மீது வழுக்கக்கூடியதாய் இருக்கிறது. B, C

என்பன ஓரிழையாலே இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அக்கோல் வழுக்கு நிலையில் இருக்கும்போது ABC என்பது ஒரு செங்கோணமாகவும், μ என்பது உராய்வுக் குணகமாகவும், a என்பது ABயிற்கும் நிலைக்குத்திற்கும் இடையே யுள்ள கோணமாகவுமிருந்தால், $\mu = \frac{\tan a}{\tan^2 a + 2}$ எனக் காட்டுக.

8. இரண்டு சம உராய்வுடைய நிலைக் கோல்களுள் ஒன்று நிலைக்குத்தாகவும், மற்றையது அடிவானத்திற்கு a என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்ததுமாகவுமிருக்கின்றன. தன் முனைகளை இக்கோல்களின்மீது கொண்ட ஒரு சீர்க் கோலொன்று இக்கோல்களின்மீது வழுக்குகின்றது. அசையும் கோல், வழுக்கு நிலையில் இருக்கும்போது அடிவானத்திற்கு அதன் சாய்வு θ என்பது $\tan \theta = \frac{1 \mp 2\mu \tan a - \mu^2}{2(\tan a \pm \mu)}$ என்பதாலே தரப்படு மெனக் காட்டுக.

9. சம எடையுடைய இரு வளையங்கள், ஒரு உராய்வுடைய கிடைக் கோலின்மீது கட்டின்றி நகரக்கூடியன. இவைகளை இணைக்கும் l நீளமுள்ள இலேசான இழையில் இவ்விரு வளையங்களின் ஒருமித்த எடைக்குச் சமமான எடையுடைய மற்றொரு வளையம் கட்டின்றி நகருகிறது. அத்தொகுதி சமநிலை அடையும் ஒரு நிலையில் கோலில் உள்ள இரு வளையங்களும் ஒன்றுக்கொன்று $2\mu(1+4\mu^2)^{-1/2} l$ என்ற தூரத்திற்கு அதிகமாக விலகி இருக்க முடியா தெனக் காட்டுக.

10. 2a, 2b என்ற பக்கங்களுடைய ஒரு சீரான செவ்வகப் பலகை, கிடைக் கோட்டில் d தூரத்திலுள்ள இரு உராய்வுடைய முளைக்கட்டைகளின் மீது பொருந்தி, எல்லைச் சமநிலையில் ஓய்விலிருக்கின்றது. கிடைக் கோட்டிற்கு 2a என்னும் பக்கத்தின் சாய்வாகிய θ என்பது

$$d \cos \lambda \cos(\lambda + 2\theta) = a \cos \theta - b \sin \theta$$ என்ற

சமன்பாட்டால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

11. 2a நீளமுள்ள இரு சமகோல்கள், ஒரு சதுரத்தினுடைய இரு பக்கங்களை ஆக்குமாறு ஒருங்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றுள் ஒன்று உராய்வுடைய ஒரு முளைக்கட்டையின் மீது கிடக்கின்றது. μ என்பது உராய்வுக் கெழு வாயின், அக்கோலின் மையத்திலிருந்து தொடு புள்ளிகளுடைய எல்லைத் தூரங்கள் $\frac{a}{2}(1 \pm \mu)$ ஆகு மெனக் காட்டுக.

12. ஒரு மெல்லிய, சீரான பொருளடர்த்தி யுள்ள சமபக்க முக்கோண வடிவுள்ள ஒரு தகடு, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், அதன் அடிப் பக்கத்தின் ஒரு முனை உராய்வுடைய ஒரு கிடைத் தரையிலும், அதன் மற்றைய முனை மழமழப்பான செங்குத்துச் சுவரிலும் இருக்கும் வண்ணம் ஒய்விலிருக்கிறது. உராய்வுக் கெழு μ எனின், அதன் அடிப் பாகம் கிடைக் கோட்டுடன் உண்டாக்கக் கூடிய மிகக் குறைவான கோணம் θ என்பது

$$\cot \theta = 2\mu + \frac{1}{\sqrt{3}}$$ என்ற சமன்பாட்டால் தரப்படும் எனக் காட்டுக.

13. W எடையுடைய இரு சமவேணிகளுள் ஒன்று, ஒன்றிற் கெதிராய்ச் சாயுமாறும் அவற்றினுடைய, முனைகள் உராய்வுடைய கிடைத் தரையின் மீது கிடக்குமாறும் வைக்கப்பட்டுகின்றன. உராய்வுக் கெழு μ என்பதும், அவை ஒன்றோடொன்று உண்டாக்கும் கோணம் 2α என்பதும் தரப்பட்டால், நுனியிலிடப்படும் என்ன எடை அவற்றை வழுக்கச் செய்யுமெனக் காண்க.

$\tan \alpha > 2\mu$ அல்லது $< \mu$ ஆகும்போது நமக்குக் கிட்டிய விடையை விளக்குக.

14. பிற்பக்கத்திலிருந்து முற்பக்கத்திற்கு அகலம் 1 அடியாகவுள்ள செவ்வகத் திண்ம வடிவ இரும்புப் பெட்டியின், மூடி விலக்கிய எடை 200 இரு. ஆகும். அதன் மூடியின் எடை 50 இரு. அது, மழமழப்பான ஒரு சுவரிலிருந்து தன் பிற்பக்கம் 6 அங்குல தூரத்திலிருக்க, அச்சுவருக்கு அடிப்பக்கம் இணையாக இருக்கும்படி வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அம்மூடி திறந்துள்ளதாய், அச்சுவருக்கு எதிராய்ச் சாய்திருந்தால், இயக்கம் இல்லாதிருத்தற் பொருட்டு அப்பெட்டிக்கும், தரைக்கும் இடையேயுள்ள மிகச் சிறிய உராய்வுக் குணகத்தைக் காண்க.

15. ஒரு கண்ணடிக் கோலானது, தன் கீழ் முனை ஓர் உருளைக் கிண்ணத்தின் நிலைக்குத்துப் பக்கத்திற்கு எதிராயிருக்க, அக்கிண்ணத்திற்கு உள்ளே ஒரு பகுதியும், வெளியே ஒரு பகுதிமாகக் கிடக்கின்றது. α. β என்பன நிலைக்குத்தோடு அக்கோல் உண்டாக்கக்கூடிய மிகப் பெரிய கோணமும், மிகச் சிறிய கோணமும் ஆயின், உராய்வுக் கோணம்

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\sin^3 \alpha - \sin^3 \beta}{(\sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin^2 \beta \cos \beta)}$$ ஆகு மெனக் காட்டுக.

16. ஒரு செருகுப் பெட்டியின்(drawer) கைப்பிடிகள் அப்பெட்டியின் பக்கங்களிலிருந்து சமதூரமாய் ஒன்றுக்கொன்று C என்னும் தூரத்தில் உள்ளன. பிற்பக்கத்திலிருந்து முற்பக்கத்திற்குள்ள அப்பெட்டியின் நீளம் μC என்பதற்கு அதிகமாகுலன்றி, ஒரு கைப்பிடியிழுவையால், அச்செருகுப் பெட்டியின் இழுப்பறையை வெளியே இழுத்தல் இயலானதெனக் காட்டுக.

17. ஒரு சீர்க்கோலொன்று, உராய்வுடைய குழிக் கோளமொன்று குள்ளே எல்லைச் சமநிலையில் கிடக்கின்றது. அக்கோல், அக்கோள மையத்தில் ஒரு செங்கோணத்தை எதிரமைத்தால், அடிவானத்திற்கு அதன் சாய்வு உராய்வுக் கோணத்தின் இரு மடங் கெனக் காட்டுக.

18. பாரமான 1அடி நீளமுள்ள ஒரு சீர்க்கோல் ஒன்று, ஒரு முனை உராய்வுடையதாகவும், மற்றை முனை மழமழப்பானதாகவும் உள்ளது. அது, 10 அங்குல ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட வளையத்திற்குள்ளே, நிலைக்குத்துத் தளத்திலே கிடக்கின்றது. அக்கோலின் உராய்வுடைய முனை அவ்வளையத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இருக்கும்போது, அக்கோல் எல்லைச் சமநிலையில் இருந்தால் உராய்வுக் கெழு $\frac{24}{43}$ எனக் காட்டுக.

19. ஒரு சீரான கோலொன்று, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஒரு நிலையான அரைக் கோள கிண்ணத்திற்குள்ளே வைக்கப்பட்டு ஓய்வில் இருக்கிறது. கோலின் நீளம் கோளத்தின் ஆரைக்குச் சமமாகும். கோலுக்கும், கிண்ணத்திற்கு மிடையே உள்ள உராய்வுக்கெழு μ எனில், சமநிலை எல்லையுறும்போது, அடிவானத்திற்குத், கோலின் சாய்வு $\tan^{-1}\left(\frac{4\mu}{3-\mu^2}\right)$ எனக் காட்டுக.

20, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே, நிலைப்படுத்திய ஒரு உராய்வுடைய வட்ட வளையத்தினுள், ஒரு பாரமான சீர்க்கோலொன்றின் முனைகள் இருக்கின்றன. அக்கோல், அவ்வளையத்தின் மையத்தில் 120° கோணத்தை எதிரமைத்துக்கொண்டு எல்லைச் சமநிலையை அடையும் போது அடிவானத்திற்கு θ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கின்றது. μ என்பது உராய்வுக் குணகமாயிருக்க, $\sqrt{3}\mu = \tan\alpha$ ஆயின்,

$\tan\theta : \tan 2\alpha :: 2 : \sqrt{3}$ எனக் காட்டுக.

21. அரைக்கோள வடிவான ஓடொன்று, உராய்வுக் கோணம் λ ஆகவுள்ள மழமழப்பற்ற தளத்தின்மீது கிடக்கின்றது. அடி

வானத்திற்கு அதன் விளிம்பினது தளவடியின் சாய்வு $\sin^{-1}(2\sin\lambda)$ விலும் பெரிதாகாதெனக் காட்டுக.

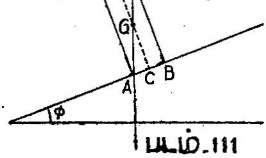
22. பாரமான ஒரு சீர் அரைக் கோள மொன்றின் குவிந்த மேற்பரப்பு, ஒரு உராய்வுடைய சாய்தளத்தைத் தொட்டுக்கொண்டு ஓய்வில் இருக்கின்றது. அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தினுல் இயலும் மிகப் பெரிய சாய்வு $\sin^{-1}\frac{3}{8}$ எனக் காட்டுக.

23. அடிவானத்திற்கு $\sin^{-1}\dfrac{3}{16}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்த ஒரு உராய்வுடைய தளத்தை ஓர் அரைக் கோள மொன்றின் வளைவான மேற்பரப்புத் தொட்டுக்கொண்டு ஓய்வில் இருக்கின்றது. நிலைக்குத்திற்கு, அவ்வரைக் கோளத்தினது தளவடியின் சாய்வைக் காண்க.

24. தன் ஆரை a ஆகவும், தன் புவி யீர்ப்பு மையம், மையத்திலிருந்து C என்னும் தூரமாகவும் உள்ள ஒரு கோளம் அடிவானத்திற்கு α என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்த உராய்வுடைய தளத்தின்மீது எல்லைச் சமநிலையில் கிடக்கின்றது. அது, $2\cos^{-1}\left(\dfrac{a\sin\alpha}{c}\right)$ என்னும் கோணத்தின் மூலமாகத் திருப்பப்படலாம் என்றும், அவ்வாறு திருப்பப்பட்டாலும், இன்னும் எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கு மென்றும் காட்டுக.

13. உதாரணம் 1

தனது தளத்தின் அடி, உராய்வுடைய ஒரு சாய்வுத் தளத்தின் மீது கிடக்கும்படி ஒரு சீருருளை யொன்று வைக்கப்படுகின்றது. அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாகக் கூட்டப்படுகின்றது. அவ்வுருளையினுடைய அடியின் விட்டம் அதனுயரத்தோடு கொள்ளும் விகிதம் உராய்வுக் குணகத்திலும் சிறிதாயின், அவ்வுருளை வழுக்கு முன்னர்க் கவிழு மெனக் காட்டுக.



படம்.111

அவ்வுருளைக் கவிழும் நிலையில் இருக்கும்போது, ϕ என்பது அடிவானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வாகுக. அவ்வுருளையின் G என்னும் புவி யீர்ப்பு மையத்தின் வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு அதனடிக்குள்ளாகச் சரியாக விழவேண்டும்.

எனின், AB என்பது அதனடியாயின், GA என்னும் கோடு நிலைக்குத்தாய் இருத்தல் வேண்டும்.

C என்பது அடியின் மையமாகவும், r என்பது அதன் ஆரையாக வும், h என்பது அதன் உயரமாகவும் இருந்தால்,

$$\tan \phi = \frac{AC}{CG} = \frac{r}{\frac{1}{2}h} = \frac{2r}{h} \quad (1)$$

அன்றியும், அவ்வுருளை வழுக்கு நிலையில் இருக்கும்போது அடி வானத்திற்கு அத்தளத்தின் சாய்வு θ எனின்,

$\tan \theta = \mu$ (2) ஆகும்.

ஆகவே, ϕ என்பது θ விலும் சிறியதானால்,

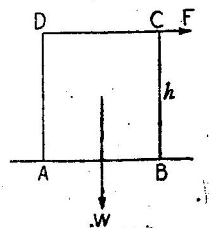
(அ-து) $\frac{2r}{h} < \mu$ ஆனால்,

அவ்வுருளை வழுக்கு முன்னர்க் கவிழும்.

உதாரணம் 2

தனது அடி AB என்பது உராய்வுடைய ஒரு மேசையின்மீது கிடக்க, ABCD என்னும் ஒரு செவ்வகம், ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தின் மீது ஒய்வில் இருக்கின்றது. படிப்படியாகக் கூடும் விசை யொன்று DCயினது நீளத்திற்குத் தாக்குகின்றது.

வழுக்குதலாலா, அல்லது கவிழுதலாலா சமநிலை உடைக்கப்படும்?



படம்.112

F என்பது விசையாயும், W என்பது எடையாயும் இருக்க.

AB = 2 a ஆகவும், BC = h ஆகவும் இருக்க.

அச்செவ்வகம் கவிழுமாயின், அது B பற்றித் திரும்பும் என்பது தெளிவு.

B பற்றி எடுக்கும் F, W என்பனவற்றினுடைய திருப்புத் திறன்களானவை சரியாகச் சமநிலை எய்தினால், இது நிகழும்.

(அ-து) F. h = W. a ஆயின், இது நிகழும். (1) அன்றியும், Fஆனது எல்லை யுராய்வுக்குச் சமனாயின்,

(அ-து) $F = \mu W$ ஆகும்பொழுது, (2)

அச்செவ்வகம் வழுக்கும்,

(1) ஆலே தரப்பட்ட Fஇன் பெறுமானம் (2) ஆலே தரப்பட்ட Fஇன் பெருமானத்திலும் சிறிது அல்லது பெரிது என்பதற்கேற்ப,

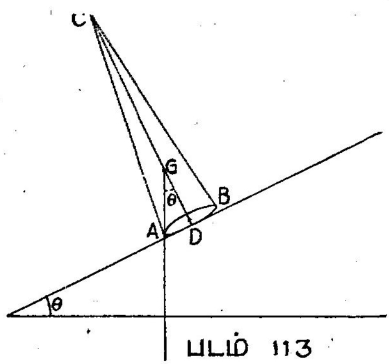
(அ-து) $\frac{a}{h} \lessgtr \mu$ என்பதற் கேற்ப,

(அ-து) $\mu \gtrless$ செவ்வகத்தின்அடி, செவ்வக உயரத்தின் இருமடங்

கோடு கொள்ளும் விகிதத்திற் கேற்ப அச்செவ்வகம் கவிழும் அல்லது வழுக்கும்.

உதாரணம் 3

2α என்னும் கொடுக்கப்பட்ட உச்சிக் கோணமுள்ள ஒரு கூம்பு, அடிவானத்திற்குச் சாய்ந்த உராய்வுடைய தளத்தின்மீது ஓய்விற் கிடக்கின்றது. அத்தளத்தின் சாய்வு, கூட்டப்படும்போது உராய்வுக் கெழு $4 \tan \alpha$ விலும் சிறியதாயின், அக்கூம்பு கவிழுமுன் வழுக்குமெனக் காட்டுக.



படம் 113

அக்கூம்பியின் உச்சி C ஆகவும், அதன் மிகக் கீழான புள்ளி A ஆகவும், Dஅடித் தளத்தின் மையமாகவும், G அதன் புவி யீர்ப்பு மையமாகவும் இருக்கட்டும்.

அப்பொழுது $GD = \frac{1}{4} CD$.

அடிவானத்திற்கு அச் சாய் தளத்தின் சாய்வு, உராய்வுக் கோணத்திற்குச் சமமானல் (அ-து) $\theta = \lambda$ ஆனல், (அ-து) $\tan \theta = \tan \lambda = \mu$ எனில், அக்கூம்பு வழுக்கு நிலையில் இருக்கும்.

அன்றியும், GA நிலைக்குத்தாகும்பொழுது, அக்கூம்பு கவிழும் நிலையில் இருக்கும்.

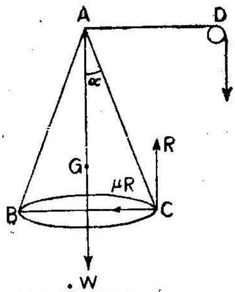
$$\text{ஆகவே, } \tan \theta = \tan AGD = \frac{AD}{GD} = \frac{AD}{\frac{1}{4}CD}$$

$$= 4 \tan \alpha$$

ஆகவே, உராய்வுக் கெழு $\mu <$ அல்லது $> 4 \tan \alpha$ என்பதற் கேற்ப அக்கூம்பு வழுக்கும் அல்லது கவிழும்.

உதாரணம் 4

ஒரு கூம்பு, உராய்வுடைய ஒரு மேசையின்மீது கிடக்க, அக்கூம்பின் உச்சிக்குத் தொடுத்த ஒரு நாண், அக்கூம்பினது நுனியின் உயரத்திற்குச் சமமான உயரத்திலுள்ள ஒரு மழமழப்பான கப்பிக்கு மேலாகச் சென்று ஒரு எடையைத் தாங்குகின்றது. அந்த எடை தொடர்ச்சியாகக் கூட்டப்படுமாயின், α என்பது அக்கூம்பின் அரை யுச்சிக் கோணமாயிருந்தால் உராய்வுக் கெழு $\gtrless \tan \alpha$ என்பதற் கேற்ப, அக்கூம்பு கவிழும் அல்லது வழுக்கு மெனக் காட்டுக.



படம்-114

நாணிலுள்ள இழுவிசை கிடையாகச் செயல் படுகிறது.

கூம்பின் உச்சியை A என்றும், அதன் அடிப் பாகத்தின் ஆரையை ‘a’ என்றும், அடிப் பாகத்தில் கப்பிக்கு நெருங்கிய புள்ளியை C என்றும், கூம்பின் எடையை W என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

கூம்பு கவிழத் தொடங்கும்போது மேசையின் எதிர்த் தாக்கம் O வழியாகச் செயல்படும்.

அப்பொழுது நாணில் உள்ள இழுவிசை T_1 என்றால், C பற்றித் திருப்புத் திறன் எடுக்கையில் நாம் பெறுவது

$$W . a = T_1 \times a \cot \alpha$$

$$\text{அல்லது } T_1 = W \tan \alpha \quad \text{(i)}$$

இனி, அக்கூம்பு வழுக்கத் தொடங்கும்பொழுது, மேசையின் செங்குத் தெதிர்த் தாக்கம் R ஆகவும், உராய்வுக் கெழு μ ஆகவும், நாணின் இழுவிசை T_2 ஆகவும் இருப்பின், விசைகளை நிலைக்குத்தாகவும் கிடையாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$R = W$$

$$\mu R = T_2$$

$$\therefore T_2 = \mu W$$

ஆகவே, T_1 < அல்லது > T_2 என்பதற் கேற்ப,

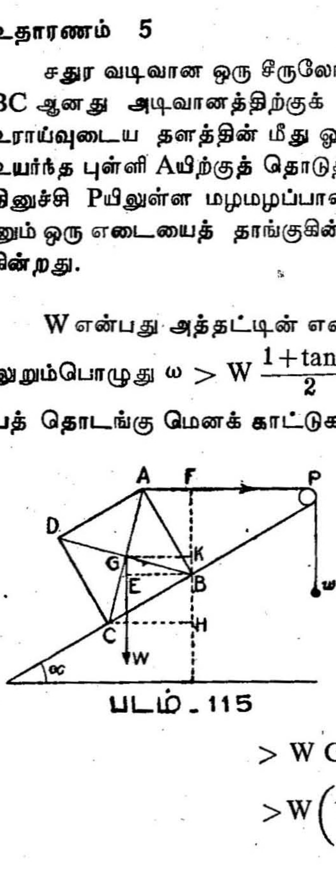
(அ-து) $W \tan\alpha$ < அல்லது > μW என்பதற் கேற்ப,

(அ-து) μ > அல்லது < $\tan\alpha$ என்பதற் கேற்ப அக்கூம்பு முதற்கண் கவிழும் அல்லது வழுக்கும்.

உதாரணம் 5

சதுர வடிவான ஒரு சீருலோகத் தட்டு ABCD என்பது, தன் பக்கம் BC ஆனது அடிவானத்திற்குக் கோணம் α வில் சாய்ந்த ஒரு முழு உராய்வுடைய தளத்தின் மீது ஓய்வில் இருக்கிறது. அத்தட்டின் மிக உயர்ந்த புள்ளி Aயிற்குத் தொடுத்துள்ள AP என்னும் ஓரிழை, அத்தளத் தினுச்சி Pயிலுள்ள மழமழப்பான கப்பிக்கு மேலாகச் சென்று ω என்னும் ஒரு எடையைத் தாங்குகின்றது. AP என்பது கிடையாக இருக்கின்றது.

W என்பது அத்தட்டின் எடையாயின், ω தொடர்ச்சியாகக் கூடுதலுறும்பொழுது $\omega > W\frac{1+\tan\alpha}{2}$ ஆகும் தருணத்தில் அத்தட்டுத் திரும்பத் தொடங்கு மெனக் காட்டுக.



படம் - 115

அச்சாய்தளம் முழு உராய்வுடையதாதலால், அத்தட்டு வழுக்காது. ஆனால், B பற்றித் திரும்பும்; இதற்கு B பற்றி இழுவிசை 'ω'வின் திருப்புத் திறன், W வின் திருப்புத் திறனைவிட அதிகமாக இருக்கவேண்டும்,

(அ-து) $\omega \times BF > W \cdot EB$

$$> W\, GK$$

$$> W\left(\frac{AF+CH}{2}\right)$$

[Bயிலிருந்து Gயின் கிடைத்தூரம் Bயிலிருந்து A, C இவற்றின் கிடைத் தூரங்களின் கூட்டுத் தொகையில் பாதி.]

(அ-து) $\omega a \cos\alpha > \frac{W}{2}(a\sin\alpha + a\cos\alpha)$

(அ-து) $\omega \cos\alpha > \frac{W}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

(அது) $\omega > \frac{W}{2}(1+\tan\alpha)$

பயிற்சி 9·3

1. ஒரு சமபக்க முக்கோண மொன்று, தன் அடி உராய்வுடைய ஒரு கிடைத் தளத்தின்மீதுகிடக்க, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஒய்விலிருக்கின்றது. படிப்படியாகக் கூடும் கிடை விசை யொன்று, அதனுச்சியில் அம்முக்கோணத்தினது தளத்திலே தாக்குகின்றது. உராய்வுக்கெழு $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ யிலும் சிறியதாயின், அம்முக்கோணம் தன் அடிமுனை பற்றித் திரும்புமுன் வழுக்கு மெனக் காட்டுக.

2. தன்னடி உராய்வுடைய ஒரு சாய்தளத்தின் மீது கிடக்கும்படி, ஒரு நேர் கூம்பு வைக்கப்படுகின்றது. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ என்பது உராய்வுக் கெழுவாயின், அக்கூம்பு வழுக்கு நிலை, கவிழு நிலை என்னும் இரண்டிலும் இருக்கும்போது அதன் கோணத்தைக் காண்க.

3. தன்னுடைய விளிம்புகள் உராய்வுடைய ஒரு சாய்பலகையினுடைய விளிம்புகளுக்குச் சமாந்தரமாயிருக்க, ஒரு சதுரத் திண்மக் கட்டை அப்பலகையின் மீது கிடக்கின்றது. அப்பலகையானது படிப்படியாக உயர்த்தப்பட, அக்கட்டை வழுக்குமுன் கவிழுமாயின், உராய்வுக் கெழு பெறக்கூடிய மிகச் சிறிய பெறுமானம் என்ன ?

4. தன் வட்டமான அடி, மழமழப்பற்ற ஒரு சாய்தளத்திற்கிடக்க ஒருருளை ஓய்வில் இருக்கின்றது. உராய்வுக் கெழு $\frac{1}{2}$ எனில், அவ்வுருளை வழுக்கு நிலையிலும், கவிழு நிலையிலும் இருக்குமாறு அதனுடைய தளத்தின் சாய்வையும், அவ்வுருளையின் உயரத்திற்கும், அடி விட்டத்திற்கும் இடையே உள்ள தொடர்பையும் காண்க.

5. தன் பக்கம், 2a ஆக உள்ள ஒரு சதுரத் திண்மக் கட்டை ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீது கிடக்கின்றது. அவற்றிற்கு இடையே யுள்ள உராய்வுக் கெழு μ ஆகும். அக்கட்டையின் புவி யீர்ப்பு மையத்தின் வழியாக ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்தில், அக்கட்டையின் நிலைக்குத்து முகமொன்றுக்குச் செங்குத்தாகப் படிப்படியாகக் கூடும் விசை யொன்று பிரயோகிக்கப்படுகிறது. $\mu < \frac{1}{2}$ எனில், அச்சதுரத் திண்மக் கட்டை கவிழாமல் வழுக்கத் தொடங்கு மென்றும், $\mu > \frac{1}{2}$ ஆக இருந்து, விசை பிரயோகிக்கும் புள்ளி கிடைத் தளத்திற்கு மேலே $\frac{a}{\mu}$ என்ற உயரத்திற்கு அதிகமானல், அது வழுக்காமல் கவிழத் தொடங்கு மென்றும் காட்டுக.

தன்னுடைய தட்டை முனை யொன்று, உராய்வுடைய ஒரு கிடைத் தளத்தின் மீது கிடக்க ஒரு திண்ம உருளை ஒய்விலிருக்கும்போது, தன் மேல்முனை மையத்தின் வழியாகச் செல்லும். ஒரு படிப்படியாகக்கூடும் விசையினால் தாக்கப்படுகிறது. அவ்வுருளையின் ஆரை r ஆகவும், உயரம் h ஆகவும், உராய்வுக் கெழு μ ஆகவும் இருந்தால், r > அல்லது $< \mu h$ என்பதற் கேற்பச் சமநிலை வழுக்குதலாலோ அல்லது கவிழுதலாலோ கலைக்கப்படும் எனக் காட்டுக.

7. ஒரு, இரு சமபக்க முக்கோண வடிவுள்ள ஒரு தகட்டின் பக்கத்திற்கும், அடிப் பாகத்திற்கும் உள்ள விகிதம் 7:2 ஆகும். அத் தகட்டின் தளம் ஒரு சாய்தளத்திற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்படியும், அம்முக்கோணத்தின் அடிப் பக்கம் அச்சாய்தளத்தின் மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டோடு பொருந்தும்படியும் வைக்கப்படுகிறது. அச்சாய் தளத்தின் கோணம் படிப்படியாக உயர்த்தப்படும் பொழுது அத்தகடு வழுக்கத் தொடங்கும் தருணத்தில், அது கவிழக் காணப்படுகிறது. அந்நிலையில், சாய்தளத்தின் கோணத்தையும், உராய்வுக் கெழுவையும் காண்க.

10. புவியீர்ப்புமையம்

(Centre of gravity)

1. ஒவ்வொரு பொருளின் துகளும் பூமியை நோக்கிக் கவரப் படுகின்றது. இக்கவர்ச்சி சக்தி, துகளின் நிறைக்கு ஏற்ப உள்ளது.

எப்பொருளும் துகள்களின் திரட்டெனக் கருதலாம். புவியோடு ஒப்பிட அப்பொருள் சிறிதாயின், அதன் துகள்களைப் புவி மையத்தோடு இணைக்கும் கோடுகள் மிக்க அண்ணளவாகச் சமாந்தரமாகும் இந்நூலின் எல்லைக்குள் அவற்றை முற்றிலும் சமாந்தரமெனக் கொள்வோம்.

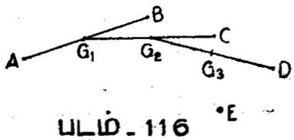
சமாந்தரமான விசைகளைக் கூட்டுச் சேர்க்கும் முறையால், அத்துகள்களின் எடைகளின் கூட்டுத் தொகைக்குச் சமமனாக உள்ள ஒரு தனி விளைவு விசையைப் பெறலாம். இவ்விசை, அப்பொருளில் ஒரு குறித்த புள்ளியிலே தாக்கும். அத்தகைய புள்ளி அப்பொருளின் புவி யீர்ப்பு மையம் எனப்படும்.

புவி யீர்ப்பு மையம் : வரையறை

ஒரு பொருளினது அல்லது ஒருமித்துக் கட்டுறுதியாக இணைக்கப் பட்ட ஒரு துகள் தொகுதியின் புவி யீர்ப்பு மையம், அப்பொருள் எந் நிலையில் வைக்கப்பட்டாலும், அப்பொருளினது எடையின் தாக்கக் கோடு எப்போதும் செல்கின்ற புள்ளியாகும்.

2. ஒவ்வொரு பொருளுக்கும், அல்லது கட்டுறுதியாக ஒருமித்து இணைக்கப்பட்ட ஒரு துகள் தொகுதிக்கும், ஒரு புவி யீர்ப்பு மையம் உண்டு.

A, B, C, D .... என்பன $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, ... என்பனவற்றைத் தம் எடைகளாகக் கொண்ட ஒரு துகள் தொகுதியாகுக.



படம் - 116

AB யை ஒன்று சேர். அதனை G_1 என்ற புள்ளியில் $AG_1 : G_1B = \omega_2 : \omega_1$ என்றாகும்படி பிரிக்கவும். ஆயின், A, B என்பவற்றிலே தாக்குகின்ற ω_1, ω_2 என்னும் சமாந்தர விசைகள் G_1 இல் தாக்குகின்ற $(\omega_1 + \omega_2)$ என்னும் ஒரு விசைக்குச் சமம்.

G_1C என்பதை ஒன்று சேர். அதனை G_2 என்ற புள்ளியில் $G_1G_2 : G_2C = \omega_3 : \omega_1 + \omega_2$ என்றாகும்படி பிரிக்கவும். ஆயின், G_1, C என்பவற்றிலே தாக்குகின்ற $\omega_1 + \omega_2, \omega_3$ என்னும் இணை விசைகள் G_2 இல் தாக்குகின்ற $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ என்னும் விசைக்குச் சமம்.

எனின், $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ என்னும் விசைகள் விளைவு மாறுபடாமல் G_2 இல் பிரயோகிக்கப்படுவன எனக் கொள்ளப்படலாம்.

இவ்வாறு செய்ய, யாதேனுமொரு பொருளை அமைக்கும் எத்தொகைத் துகள்களுடைய எடைகளும் விளைவு மாற்றப்படாமல், அப்பொருளில் ஒரு புள்ளியிற் பிரயோகிக்கப்படுவனவாகக் கொள்ளலாம்.

மேலும், சமாந்தர விசைகளின் விளைவினது நிலையைக் காண்பதற்கு உரிய அமைப்பு, அவ்விசைகளுடைய திசைகளைப் பொருத்ததாக இல்லாமல் பிரயோகப் புள்ளியிலும், அளவிலுமே சார்ந்திருக்கின்றமையால், அப்பொருள் யாதேனுமொரு கோணத்திற் கூடாகத் திருப்பப்பட்டாலும், நாம் ஈற்றில் அடையும் புள்ளி ஒரே புள்ளியாகும். அதற்குக் காரணம், அப்பொருட் பகுதிகளுடைய எடைகள் அவ்விரு நிலைகளிலும் அப்பொருளைப் பற்றி ஒரே திசையில் இல்லாத போதிலும் அவை இன்னும் சமாந்தரம் என்பதே.

அன்றியும், ஒரு பொருளுக்கு, ஒரு புவியீர்ப்பு மையமே இருக்கக்கூடுமென நாம் காட்டலாம். இயலுமாயின், அப்பொருளுக்கு G, G_1 என்னும் இரு புவி யீர்ப்பு மையங்கள் இருக்கட்டும்.

இப்பொழுது, அப்பொருள் GG_1 கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் திருப்பப்படுக.

ஆயின், ஒரு நிலைக்குத்து விசைத் தொகுதியின் விளைவு G, G_1 என்னும் இரண்டு புள்ளி வழித் தாக்க வேண்டும்.

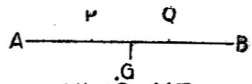
ஆனால், ஒரு நிலைக்குத்து விசைத் தொகுதியின் விளைவு, கட்டாய மாக நிலைக்குத்தாக இருத்தல் வேண்டும். ஆகவே, அது GG_1 என்னும் கிடைக் கோட்டில் தாக்க இயலாது.

எனின், அப்பொருளுக்கு ஒரு புவி யீர்ப்பு மையமே இருக்கக் கூடும்.

3. இனி, எளிய வடிவங்களுடைய சில பொருள்களின் புவி யீர்ப்பு மையத்தைக் காண்போம்.

I. ஒரு சீர்க்கோல்

AB என்பது ஒரு சீர்க்கோல். G என்பது அதன் மையப் புள்ளி.



படம்-117

அக்கோலில், G, A என்பனவற்றிற் கிடையே P என்ற யாதேனு மொரு புள்ளி யையும், GB யில் Q என்ற புள்ளியை GQ=GP ஆகும்படி எடுக்கவும்.

P, Q என்பனவற்றிலுள்ள சமதுகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையம் G என்பது தெளிவு

அன்றியும், G, A என்பனவற்றிற்கு இடையே யுள்ள ஒவ்வொரு துகளுக்கும், G, B என்பவற்றிற்கு இடையே G யில் இருந்து சம தூரத்தில் ஒரு சமதுகள் உண்டு.

இம்மாதிரி எடுக்கக்கூடிய துகள் சோடிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும், புவி யீர்ப்பு மையம் G யில் இருக்கும்.

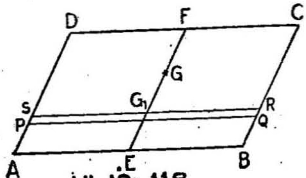
ஆகவே, அம்முழுக் கோலின் புவி யீர்ப்பு மையம் G யில் இருக்கும்.

குறிப்பு

ஒரு சீர்ப்பொருள் ஒன்றில் தன்னைப் பற்றிச் சமமாக்கப்படும் துகள் சோடிகளாகவும், அப்பொருள் பிரிக்கப்படத் தக்கதாகவுமுள்ள ஒரு புள்ளி G என்பது காணப்படின், G ஆனது அப்பொருளின் புவி யீர்ப்பு மையமாகும் என்பது முந்திய இரு பிரிவுகளின் வழியிலிருந்து தெளிவாகும்.

ஆகவே, ஒரு சீர்வட்ட மொன்றின், அல்லது சீர்கோள மொன்றின் புவி யீர்ப்பு மையம் அதன் மையமாகும்.

II. ஒரு சீரிணைகரம்



படம்-118

ABCD என்பது ஓரிணைகர மாகுக.

E, F என்பன AB, CD என்பவற்றினுடைய மையங்களாகுக.

AB யிற்குச் சமாந்தரமான கோடுகளால், அவ்விணைகரத்தை, எண்ணில் நீள் வரித் துண்டுகளாகப் பிரிக்க

PQ, RS என்பன அடுத்து வரும் யாதேனு மொரு சோடியாகுக.

ஆயின், PQRS என்பது தன் புவி யீர்ப்பு மையம், தனது நடுப் புள்ளி G_1 இல் உள்ள ஒரு சீர் நேர்கோடு எனக் கொள்ளலாம்.

இப்பொழுது, G_1 ஆனது EF இல் உள்ளது.

இவ்வாறே, ஏனைய நீள் வரித் துண்டுக ளெல்லாவற்றினுடைய புவி யீர்ப்பு மையமும் EF இல் கிடக்கும்.

எனின், முழு உருவத்தின் புவி யீர்ப்பு மையமும் EF இல் கிடக்கும்.

இவ்வாறே, AD யிற்குச் சமாந்தரமான கோடுகளால் அவ்விணைகரத்தைப் பிரித்தலால், புவி யீர்ப்பு மையமானது, AD, BC என்பனவற்றினுடைய மையங்களை இணைக்கும் கோட்டிலே இருக்கு மெனக் காணலாம்.

எனின், புவி யீர்ப்பு மையம், இந்த இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றை யொன்று வெட்டும் புள்ளி G என்பதில் இருக்கும்.

இப்பொழுது, G என்பது அவ்விணைகரத்தினுடைய மூலை விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி என்பதும் தெளிவு.

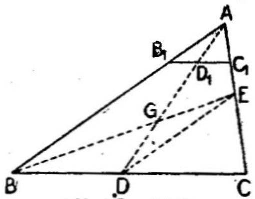
குறிப்பு

III ஒரு சீர்முக்கோணத் தகடு

ABC என்பது ஒரு முக்கோணத் தகடாகுக. D, E என்பன BC CA என்னும் பக்கங்களின் மையங்களாகுக.

AD, BE என்பனவற்றை ஒன்று சேர். அவை Gயில் சந்திக்கட்டும்.

G என்பதே அம்முக்கோணத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம் என நிறுவலாம்,



படம் - 119

$B_1\ C_1$ என்பது BC யிற்குச் சமாந்தரமாகி AD என்பதை D_1 இல் வெட்டுகின்றயாதேனுமொரு கோடாகுக. இப்பொழுது, அம் முக்கோணம் $B_1\ C_1$ என்பதைப் போன்று, எல்லாம் BC யிற்குச் சமாந்தரமாயுள்ள எண்ணில் நீள் வரித் துண்டுகளாக ஆக்கப்பட்டுள்ளதெனக் கொள்ளலாம்.

$B_1\ C_1$, BC என்பன சமாந்தரமாகையால், முக்கோணங்கள் AB_1D_1, ABD என்பன வடிவொத்தவை; அவ்வாறே முக்கோணங்கள் AD_1C_1, ADC என்பனவும் வடிவொத்தவை.

$$\text{எனின், } \frac{B_1\ D_1}{BD} = \frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1\ C_1}{DC}$$

ஆனால், $BD = DC$

$$\therefore B_1\ D_1 = D_1\ C_1$$

ஆகவே, $B_1\ C_1$ என்னும் துண்டின் புவி யீர்ப்பு மையம் ADயில் கிடக்கும்.

அவ்வாறே, ஏனைய நீள் வரித் துண்டுகள் எல்லாவற்றினுடைய புவி யீர்ப்பு மையங்களும் ADயில் இருக்கும். எனின், அம் முக்கோணத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம் ADயிற் கிடக்கும்.

BEயை ஒன்று சேர். அது, ADயை Gயில் சந்திக்கட்டும்.

அம்முக்கோணத்தை ACயிற்குச் சமாந்தரமான நீள்வரித் துண்டுகளாகப், பிரித்தலால், அதன் புவி யீர்ப்பு மையம் BEயில் கிடக்குமென்பதை முன்போலக் காணலாம். எனின், வேண்டிய புவி யீர்ப்பு மையம் Gயில் இருக்கும். மேலும், Dஎன்பது BCயின் மைய மாதலாலும், E என்பது ACயின் மைய மாதலாலும், DE என்பது BAக்கு இணையாகும். எனின், முக்கோணங்கள் GDE, GAB என்பன வடிவொத்தவை.

$$\therefore \frac{GA}{GD} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$$

$\therefore AG=2\ GD$

அன்றியும், $3GD=2GD+GD=AG+GD=AD$

$\therefore GD=\frac{1}{3}\ AD$

ஆகவே, ஒரு முக்கோணத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம் யாதேனு மொரு பக்கத்தின் மையத்தை, எதிர் உச்சிக்கு இணைக்கும் கோட்டின் மீது, அப் பக்கத்திலிருந்து அவ்வுச்சியினது தூரத்தில் மூன்றுலொரு பகுதிக்குச் சமமான தூரத்தில் இருக்கும்

தேற்றம்

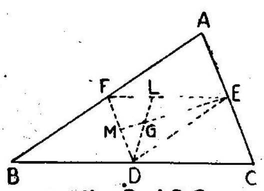
எந்த சீர்முக்கோணத் தகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையமும், அம்முக் கோண உச்சிகளில் வைத்த மூன்று சமதுகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையத்தோ டொன்றுகும்.

B, C என்பனவற்றில் ஒவ்வொன்றும் ம யிற்குச் சமனுன இரு சமதுகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையம், BC யின் மையமாகிய D யில் இருக் கும்.

அன்றியும், D யில் உள்ள 2ω, A யில் உள்ள ω என்பவற்றின் புவி யீர்ப்பு மையம் DA என்பதை 1:2 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும்,

ஆனல், அத்தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மைய மாகிய G என்பது, DA என்பதை 1 : 2 விகிதத்திற் பிரிக்கும், எனின், அம்மூன்று துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையம், அத்தகட்டினது புவி யீர்ப்புமையத்தோடு ஒன்றுகும்.

IV முக்கோணமாக அமையும் மூன்று கோல்கள்



படம்-120

அம்மூன்று கோல்கள் BC, CA, AB என்பன வாகுக. அவை ஒரே தடிப்பும், பொருளும் உடையனவாய் இருக்க. D, E, F என்பன அக்கோல்களின் மையங்களாகுக. DE, EF, FD என்பன வற்றை ஒன்று சேர்.

DE, EF, FD என்பன முறையே AB, BC, CA என்பனவற்றின் பாதியாகும். அம்மூன்று கோல்களின் புவி யீர்ப்பு மையங்கள் D, E, F என்பனவாகும்,

ஆகவே, AB, AC என்னும் கோல்களின் புவி யீர்ப்பு மையம் EF இன் மீது,

EL : LF :: F இல் உள்ள எடை : E இல் உள்ள எடை

:: AB : AC

:: 2DE : 2DF

:: DE : DF ஆகவுள்ள L என்னும் புள்ளியாகும்.

இதனுல், DL என்பது EDF என்னும் கோணத்தை இரு சமக் கூறிடும் என்பது தெளிவு.

அன்றியும், அம்மூன்று கோல்களின் புவி யீர்ப்பு மையம் DL இல் கிடத்தல் வேண்டும்.

இதேபோல், புவி யீர்ப்பு மையம் கோணம் DEF என்பதை இரு சமக் கூறிடும் EM இலும் கிடத்தல் வேண்டும்.

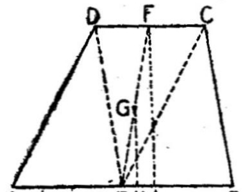
எனவே, வேண்டிய புள்ளி DL, EM என்பன சந்திக்கும் புள்ளியாகும்.

ஆகவே, அது DEF என்னும் முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையமாகும்.

(அ–து) அக்கோல்களின் மையங்களை இணைப்பதால் உண்டாகும் முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையமாகும்.

V ஒரு சரிவகத் தகடு (Trapezium)

ABCD என்பது ஒரு சரிவகமாகுக. அதனுடைய பக்கங்கள் AB, CD என்பன சமாந்தரமாகவும் முறையே 2a, 2b என்ற நீளங்கள் கொண்டவையாகவும் இருக்க. அதன் உயரம் ‘h’ எனக்கொள்க.



படம்.121

E, F என்பன முறையே AB, CD என்பனவற்றின் மையங்களாகுக. ED, EC என்பனவற்றை இணைக்க, முக்கோணங்கள் AED, ECD, CEB என்பனவற்றின் பரப்புகள் முறையே $\frac{1}{2}$ ah, bh; $\frac{1}{2}$ ah என்பனவற்றிற்குச் சமமாகும். ஆகவே அவைகளின் a, 2b, a என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாகும். ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் கோணப்புள்ளிகளிலும், அவைகளின் எடைக்குமூன்றிலொரு பங்குக்குச் சமமான துகள்களை வைக்கவும்.

இவ்வண்ணம், பின் வருவனவற்றிற்கு விகித சமமான எடைகளைப் பெறுவோம்.

C, D ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{a}{3}+\frac{2b}{3}$,

A, B ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{a}{3}$

E யில் $\frac{2a}{3}+\frac{2b}{3}$

இனி, C, D என்பனவற்றிலுள்ள சம எடைகளை CD யின் மையம் F இல் $\frac{2a}{3}+\frac{4b}{3}$ என்பதற்கு விகித சமமான ஒரு எடையினுலும், A, B என்பனவற்றிலுள்ள சம எடைகளை AB யின் மையம், E இல் $\frac{2a}{3}$ என்பதற்கு விகித சமமான ஒரு எடையினுலும் பிரதியீடு செய்க.

இவ்வாறு நாம் பெறும் எடைகள்,

E இல் $\frac{4a}{3}+\frac{2b}{3}$ என்பதும்,

F இல் $\frac{2a}{3}+\frac{4b}{3}$ என்பது மாகும்.

ஆகவே, வேண்டிய புவி யீர்ப்பு மையம் G ஆனது, EF என்னும் கோட்டின்மீது

$$\frac{EG}{GF}=\frac{\text{F இலுள்ள எடை}}{\text{E இலுள்ள எடை}}=\frac{\frac{2a}{3}+\frac{4b}{3}}{\frac{4a}{3}+\frac{2b}{3}}$$

$$=\frac{2a+4b}{4a+2b}=\frac{a+2b}{2a+b}$$ என்ற விகிதத்தில்

EF ஐப் பிரிக்கும் புள்ளியாகும்.

கிளை

சரிவகத்தின் உயரம் h எனில், AB யிலிருந்து G யின் உயரம் $=\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$ என நிறுவுக.

$$\frac{EG}{GF}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

$$\therefore \frac{EG}{EG+GF}=\frac{a+2b}{a+2b+2a+b}=\frac{a+2b}{3a+3b}$$

$$\therefore \frac{EG}{EF}=\frac{a+2b}{3(a+b)}$$

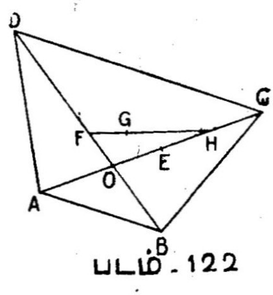
இப்பொழுது, $\frac{KG}{LF}=\frac{EG}{EF}=\frac{a+2b}{3(a+b)}$

$$\therefore KG=\frac{a+2b}{3(a+b)}\ LF=\tfrac{1}{3}h\ \frac{(a+2b)}{(a+b)}$$

VI ஒரு நாற்கரத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம் :—

ஒரு நாற்கரத் தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மையத்தைக் காணும் முறையை விளக்கி, அதன் புவி யீர்ப்பு மையமும், அதன் கோண உச்சிகளில் வைத்த நான்கு சமதுகள்களின் எடைகளோடு அந்நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில் வைத்த ஐந்தாவது சமதுகளின் குறைக் குறியோடு (negative sign) கூடிய எடையை, ஒருமித்து எடுக்க வரும் தொகுதியின் புவி யீர்ப்புமையமும் ஒன்றும் எனக் காட்டுக.

ABCD என்பது ஒரு நாற்கர மாகுக, AC, BD என்ற மூலை விட்டங்கள் ஒன்றை யொன்று வெட்டிக்கொள்ளும் புள்ளியை O எனக் குறிக்கவும். AC, BD என்பன வற்றின் மையப் புள்ளிகள் முறையே E, Fஎன்பனவாகுக. ABD, BCD என்ற முக்கோணங்களின் எடைகளை முறையே ω_1 ω_2 எனக் குறிப்போம். ABCD என்ற நாற்கரத் தகட்டின் எடை W ஆனால்,



படம் - 122

$$\omega_1+\omega_2=W \qquad (1)$$

ABD என்ற முக்கோணத் தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மையமும், A,B,D என்ற அம்முக்கோண உச்சிகளில் ஒவ்வொன்றும் $\frac{\omega_1}{3}$ என்ற எடைக்குச் சமமாக வைக்கப்பட்ட மூன்று துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையமும் ஒன்றும்,

இதே போல், BCD என்ற முக் கோணத் தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மையமும், B, C, D என்ற அம்முக்கோண உச்சிகளில் ஒவ்வொன்றும் $\frac{\omega_2}{3}$ என்ற எடைக்குச் சமமாக வைக்கப்பட்ட மூன்று துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையமும் ஒன்றுகும். ஆகவே, ABCD என்ற நாற்கரத்தின் புவி யீர்ப்பு மையமும் A, B, C, D என்பனவற்றில் வைக்கப்பட்ட $\frac{\omega_1}{3}, \frac{\omega_1+\omega_2}{3}, \frac{\omega_2}{3}, \frac{\omega_1+\omega_2}{3}$ என்ற எடைகளின் புவி யீர்ப்பு மையமும் ஒன்றுகும். (2)

B, D என்ற புள்ளிகளில் உள்ள எடைகளின் விளைவு $= \frac{2(\omega_1+\omega_2)}{3}$

$$= \frac{2W}{3}$$

இது, BD இன் மையப் புள்ளியாகிய Fஇல் செயல்படும். இப்பொழுது A யில் உள்ள $\frac{\omega_1}{3}$ என்ற எடைக்கும், C யில் உள்ள $\frac{\omega_2}{3}$ என்ற எடைக்கும் உள்ள விளைவு

$\frac{\omega_1}{3} \times AH = \frac{\omega_2}{3} \times HC$ என்ற சமன்பாட்டால் நிச்சயிக்கப்படும் AC யில் உள்ள H என்ற புள்ளியில் செயல்படும்.

$$(\text{அ-து}) \ \frac{AH}{HC} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \qquad (3)$$

H இல் உள்ள விளைவின் அளவு $= \frac{\omega_1}{3} + \frac{\omega_2}{3} = \frac{\omega_1+\omega_2}{3} = \frac{W}{3}$

இனி, F இல் உள்ள $\frac{2W}{3}$ என்ற எடைக்கும், H இல் செயல்படும் $\frac{W}{3}$ என்ற எடைக்கும் உள்ள விளைவு, FH இல் G என்ற புள்ளியில்,

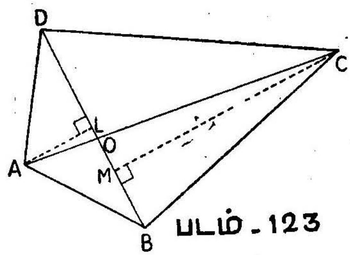
$\frac{2w}{3} . FG = \frac{w}{3} \times HG$ என்பதற்கு ஏற்பச் செயல்படும்.

$$(\text{அ-து}) \ \frac{FG}{HG} = \frac{1}{2} \qquad (4)$$

G யில் உள்ள விளைவின் அளவு $= \frac{2w}{3} + \frac{w}{3} = W$ ஆகவே, ABCD என்ற நாற்கரத் தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மையம் G ஆகும். இங்கு முழுத் தகட்டின் எடையும் செயல்படும்.

வேறுவழி

இப்பொழுது.



படம் - 123

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\triangle ABD}{\triangle CBD}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}BD.\ AL}{\frac{1}{2}BD.CM}$$

$$= \frac{AL}{CM} = \frac{AO}{OC}$$

$$\therefore\ \omega_2 .\ AO = \omega_1 .\ OC \qquad (5)$$

இனி, (2) இல் கூறியபடி, ABCD என்ற நாற்கரத்தின் புவி யீர்ப்பு மையமும், A, B, C, D என்ற புள்ளிகளில் வைக்கப்பட்ட

$\frac{\omega_1}{3}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{3}, \frac{\omega_2}{3}, \frac{\omega_1 + \omega_2}{3}$ என்ற எடைகளின் புவி யீர்ப்பு மையமும் ஒன்ருகும்.

A யில் $\frac{\omega_2}{3}$ என்ற எடையையும், C யில் $\frac{\omega_1}{3}$ என்ற எடையையும் சேர்க்கவும். இதனுல் நாற்கரத்தின் ஒவ்வொரு முனையிலும் $\frac{W}{3}$ என்ற எடை செயல்படுகிறது. இனி, சேர்க்கப்பட்ட எடைகளில் விளைவு AC யில் உள்ள O′ என்ற புள்ளியில்

$$\frac{\omega_2}{3} .\ AO' = \frac{\omega_1}{3} .\ O'C' \text{ எனபதற்கேற்பச் செயல்படும்.}$$

$$(\text{அ-து})\ \omega_2\ AO' = \omega_1 .\ O'C' \qquad (6)$$

(5), (6) இவற்றிலிருந்து, O′ என்பது O உடன் பொருந்த வேண்டுமென்பது தெளிவு.

மேலும். O வில் உள்ள விளைவின் அளவு $= \frac{\omega_2}{3} + \frac{\omega_1}{3} = \frac{W}{3}$

நாம் விசைகளைச் சேர்த்தால் ஏற்பட்ட இவ்விளைவைச் சமப்படுத்த Oவில் குறைக் குறியுடன் கூடிய $\frac{W}{3}$ என்ற ஒரு எடையைச் சேர்த்தால், இது நாம் சேர்த்த விசைகளைச் சமப்படுத்தும்,

ஆகவே, ABCD என்ற நாற்கரத்தின் புவி யீர்ப்பு மையமும், A, B, C, D என்ற புள்ளிகளில் உள்ள சம எடைகளுடன் O வில் உள்ள குறைக் குறியுடன் கூடிய சமஎடையையும் ஒருமித்து எடுத்த தொகுதி யின் புவி யீர்ப்பு மையமும் ஒன்றுகும்.

குறிப்பு 1

மேற் கொடுக்கப்பட்ட நிருபணத்தில், சம எடை ஒவ்வொன்றும் $\frac{w_1+w_2}{3}=\frac{W}{3}$ என்று கொள்ளப்பட்டது. ஆனால், சம எடை ஒவ்வொன்றும் நாற்கரத்தின் எடைக்குச் சம்பந்தப்பட்டதாய் இருக்கத் தேவையில்லை.

A, B, C, D என்ற நான்கு புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும், யாதேனும் ஒரு சம எடை m உடன். O வில் குறைக் குறியுடன் கூடிய அதே எடை m ஐயும், ஒருமித்து எடுத்த தொகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் G யுடன் பொருந்து மெனக் காணலாம்.

குறிப்பு 2

(5) லிருந்து $\frac{AO}{OC}=\frac{\omega_1}{\omega_2}$

(3) லிருந்து $\frac{HC}{AH}=\frac{\omega_1}{\omega_2}$

$$\therefore \frac{AO}{OC}=\frac{HC}{AH}$$

(அ-து) $\frac{AO}{AO+OC}=\frac{HC}{HC+AH}$

(அ-து) $\frac{AO}{CA}=\frac{HC}{AC}$

$\therefore AO=HC$ (7)

E, AC யின் மையப் புள்ளி ஆதலால், $OE=EH$ (8)

$\therefore 2\,EH=1.\,OH$ (9)

இப்பொழுது, A, C என்ற புள்ளிகளில் உள்ள m என்ற சம எடைகளுக்கு விளைவு E என்ற புள்ளியில் 2 m ஆகும்,

இத்துடன் O விலுள்ள —m என்ற எடையை ஒருமித்து எடுக்க இந்த எதிர் எடைகளின் விளைவு 2 m, EX=1.m OX என்பதற் கேற்ப OE ஐப் பிரிக்கும் X என்ற புள்ளியில் செயல்படும்.

$$\text{(அ-து)}\ 2EX = 1.\ OX \qquad (10)$$

(9),(10) லிருந்து X ஆனது Hஉடன் பொருந்த வேண்டும் என்பது தெளிவு.

VII ஒரு தள சீர் நாற்கரத் தகட்டினுடைய கோணப் புள்ளிகளும், மூலை விட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளியும், அத்தளத்தில் உள்ள யாதேனுமொரு கோட்டிலிருந்து a, b, c, d, e என்னும் தூரங்களில் உள்ளன. அதே கோட்டிலிருந்து புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\frac{1}{3}(a+b+c+d-e)$ எனக் காண்போம்.

நாற்கரத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையமும், அதன் கோண உச்சிகளில் வைத்த நான்கு சமதுகள்களின் எடைகளோடு, அந்நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளியில் வைத்த ஐந்தாவது சமதுகளின் குறைக் குறியோடு (negative sign) கூடிய எடையை ஒருமித்து எடுக்கவரும் தொகுதியின் புவி யீர்ப்பு மையமும் ஒன்றாகும் என அறிவோம்.

கொடுத்த கோட்டிலிருந்து புவி யீர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\overline{x}$ எனில், இக்கோட்டைப் பற்றிக் கூற்று எடைகளின் திருப்புத் திறன்களும், அவற்றின் விளைவின் திருப்புத் திறனும் ஒன்றே யாகும்.

$$\text{ஆகவே,}\ \{4\omega+(-\omega)\}\overline{x}=a\omega+b\omega+c\omega+d\omega+e(-\omega)$$

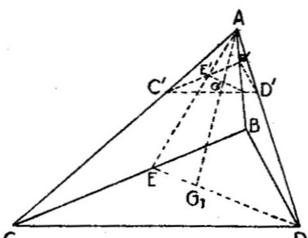
$$\therefore\ \overline{x} = \tfrac{1}{3}(a+b+c+d-e)$$

VIII நான்முகத் திண்மம் (Tetrahedron)

ABCD என்பது ஒரு நான்முகத் திண்ம மாகுக.

E என்பது BC யின் மைய மாகுக G_1 என்பது அடி BCDயின் புவி யீர்ப்பு மையமாகுக.

BCD க்கு இணையாக அந்நான்முகத் திண்மத்தின் யாதேனுமொரு வெட்டு முகம் B′ C′ D′ என்பதை எடுக்க.



படம் - 124

AE ஆனது $B'C'$ என்பதை E' இலும், AG_1 என்பது $D'E'$ என்பதை G_1 இலும் சந்திக்க. ஆயின், வடிவொப்பு முக்கோணங்கள் $AE'G'$, AEG_1 என்பனவற்றிலிருந்து, நாம் பெறுவது

$$\frac{E'G'}{EG_1} = \frac{AG'}{AG_1}$$

மேலும், வடிவொப்பு முக்கோணங்கள் $AG'D'$ AG_1D என்பனவற்றிலிருந்து நாம் பெறுவது

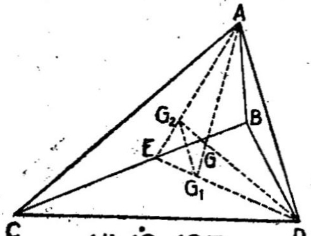
$$\frac{G'D'}{G_1D} = \frac{AG'}{AG_1}$$

$$\therefore \frac{E'G'}{EG_1} = \frac{G'D'}{G_1D}$$

$$\therefore \frac{E'G'}{G'D'} = \frac{EG_1}{G_1D} = \frac{1}{2}$$

எனின் G' என்பது $B'C'D'$ என்னும் வெட்டு முகத்தின் புவியீர்ப்ப மைய மாகும்.

அந்நான்முகத் திண்மத்தின் அடி BCDயிற்குச் சமாந்தரமான முக்கோணங்களால் ஆக்கப்பட்டதெனக் கொள்வதால், ஒவ்வொரு முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையமும் AG_1 என்னும் கோட்டில் இருக்கின்றமையால், அந்நான்முகியின் புவியீர்ப்பு மையம் AG_1 என்பதிற் கிடக்கு மென்பது தெளிவு. இதேபோல், நான்முகியின் புவியீர்ப்பு மையம், D என்னும் உச்சியை அதன் எதிர்முகம் ABCயின் புவியீர்ப்பு மையம் G_2 உடன் இணைக்கும் கோட்டிலும் கிடக்குமெனக் காட்டலாம். அன்றியும், G_2 என்பது AE என்னும் கோட்டில் கிடந்து அதனை 1 ; 2 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றது.



படம்-125

ஆகவே, G என்னும் வேண்டிய புவியீர்ப்பு மையம், AG_1, DG_2 என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளியாகும்.

G_1G_2 என்பதை ஒன்று சேர். இப்பொழுது, வடிவொத்த முக்கோணங்கள் G_2GG_1, AGD என்பனவற்றிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{G_2G}{GD} = \frac{G_2G_1}{AD}$$

மேலும், வடிவொத்த முக்கோணங்கள் $EG_1 G_2$, EAD என்பன வற்றிலிருந்து நாம் பெறுவது

$$\frac{G_2G_1}{AD} = \frac{EG_1}{ED} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{G_2 G}{GD} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore GD = 3G_2G$$

$$\therefore G_2 D = 4 G_2 G$$

இதேபோல் $G_1A = 4 \; G_1G$

எனின், **அந்நான்முகியின் புவி யீர்ப்பு மையம், யாதேனும் ஒரு முகத்தின் புவி யீர்ப்பு மையத்தை, அந்நான்முகத் திண்மத்தின் எதிர்க்கோணப் புள்ளிக்கு இணைக்கும் கோட்டின்மீது அம்முகத்தி லிருந்து அக்கோணப் புள்ளியிருக்கும் தூரத்தின் காற்பங்குக்குச் சமனான தூரத்தில் கிடக்கும்.**

×

கி. தே.

ஒரு நான்முகத் திண்மத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம், அதனுடைய உச்சிகளிலே வைக்கப்பட்ட சம துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையத்தோடு ஒன்றுகும்.

ஒரு முக்கோணத்தின் கோணப் புள்ளிகள் B, C, D என்பனவற்றில் வைக்கப்பட்ட ω என்னும் சமதுகள்களின் எடை அம் முக் கோணத்தின் புவி யீர்ப்பு மையமாகிய G_1 இல் வைக்கப்பட்ட 3ω என் னும் எடைக்குச் சமம். அன்றியும் G என்பது G_1 A என்பதை 1 ;3 விகிதத்தில் பிரிப்பதால் G_1 இல் உள்ள 3ω என்னும் எடைக்கும் A யில் உள்ள ω என்ற எடைக்கும் புவி யீர்ப்பு மையம் G என்பதே ஆகும்.

குறிப்பு

நான்முகியின் உச்சிகளிலுள்ள நான்கு துகள்களில், B, D யில் உள்ள துகள்களை ஒன்று சேர்த்தும் A, C யில் உள்ள துகளை ஒன்று சேர்த்தும் கருத, வடிவ கணிதத் தேற்ற மொன்று நாம் பெறுவோம்.

B, D யில் உள்ள துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையம், BDயின் மையப் புள்ளியாகும்.

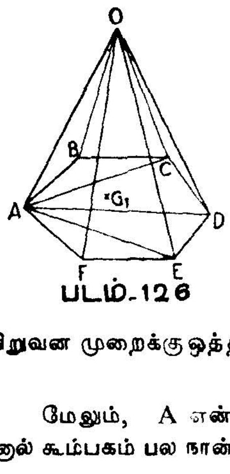
இதே போல், A, Cயில் உள்ள துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையம் ACயின் மையப் புள்ளியாகும்.

ஆகவே. நான்கு துகள்களின் புவி யீர்ப்பு மையம் BD, AC என்னும் எதிர்ப் பக்கங்களின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் மையப் புள்ளியாகும்.

ஆகவே, இதிலிருந்து பெறும் தேற்றமாவது:

"ஒரு நான்முகியின் எதிர்ப் பக்க சோடிகளின் மையப் புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று (அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தில்) வெட்டிக்கொள்ளும்"

IX கூம்பகம் அல்லது பட்டைக்கூம்பு (Pyramid)



படம்-126

கூம்பகத்தின் அடி ABCD என்னும் ஒரு பல்கோண மாகுக.

அதன் உச்சி O ஆகுக. கூம்பகத்தை அதன் அடிக்கு இணையாகப் பல சிறு துண்டுகளாகப் பிரிக்கவும். அவைகளெல்லாம் அடியுடன் வடி வொத்தனவாகவும், அடிக்கு நேர் ஒக்க நிறுத்தப்பட்டவை யாகவும் காணப்படும். அவைகளின் புவி யீர்ப்பு மையங்கள் O என்பதை G_1க்குத் தொடுக்கும் கோட்டில் இருக்க வேண்டும் என்பதை முந்திய பிரிவிலுள்ள நிறுவன முறைக்கு ஒத்த முறையிற் காட்டலாம்.

மேலும், A என்ற உச்சியை மற்ற உச்சிகளுடன் சேர். இதனால் கூம்பகம் பல நான்முகிகளாகப் பிரிக்கப்படுகின்றது.

OABC என்ற நான்முகியின் புவி யீர்ப்பு மையம், அடியிலிருந்து Oவின் தூரத்தில் காற் பங்குக்குச் சமனான தூரத்தில் கிடக்கும்.

இதேபோல், இதர நான்முகிகளின் புவி யீர்ப்பு மையங்களும், அடியிலிருந்து Oவின் தூரத்தில் காற் பங்குக்குச் சமனான தூரத்தில் கிடக்கும். ஆகவே, கூம்பத்தின் புவி யீர்ப்பு மையம், அடியிலிருந்து Oவின் தூரத்தில் காற் பங்கு தூரத்தில் அவ்வடிக்கு இணையாக வரையப்படும் தளத்தின் மீது கிடக்கும்.

எனின், முழுக் கூம்பகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் $G_1 O$ என்னும் கோட்டிற் கிடந்து அதனை 1 : 3 என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும்,

X திண்மக் கூம்பு (Solid cone)

முந்திய பிரிவிலுள்ள பட்டைக் கூம்பகத்தின் தள வடியினுடைய பக்கங்களின் தொகை வரையறையின்றிக் கூட்டப்படட்டும். இறுதியாக, அத்தள வடி ஒரு வட்டமாகும் அக்கூம்பகம் O என்பதைத் தன் உச்சியாகக் கொண்ட ஒரு திண்மக் கூம்பாகும், அன்றியும், புள்ளி G_1 என்பது அவ்வட்ட அடியின் மையமாகும்.

எனின்,ஒரு திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம், அடியின் மையத்தை உச்சிக்குச் சேர்க்கும் கோட்டின் மீது, அடியிலிருந்து உச்சியினது தூரத்தில் காற் பா குக்குச் சமனுன தூரத்தில் இருக்கும்

XI ஒரு குழிக் கூம்பின் மேற்பரப்பு (Surface of a Hollow Cone)

அக்கூம்பின் உச்சியை அவ்வட்ட அடியில் ஒன்றுக்கொன்று வரையறையின்றி, அண்மையிலுள்ள புள்ளிகளுக்கு இணைத்து, அக்கூம்பின் மேற் பரப்பை முடிவில் தொகை முக்கோணத் தகடுகளாகப் பிரிக்கலாம். அவற்றினுடைய புவியீர்ப்பு மையங்கள் எல்லாம், அக்கூம்பின் அடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு தளத்திலே, உச்சியிலிருந்து அடியினது தூரத்தில் மூன்றில் இரண்டு பங்கு தூரத்தில் கிடக்கின்றன என்பதால், அம்முழுக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம் அத்தளத்திற் கிடத்தல் வேண்டும்,

ஆனல், சமச் சீர் காரணமாக, புவியீர்ப்பு மையம், அக்கூம்பின் அச்சின்மீது கிடத்தல் வேண்டும், எனின், வேண்டிய புள்ளி மேற் கூறிய தளம் அவ்வச்சைச் சந்திக்கும் புள்ளியாகும்.

ஆகவே, அக்குழிக் கூம்பின் புவியீர்ப்பு மையம், அதன் அச்சின்மீது அடியிலிருந்து அக்கூம்பின் உயரத்தில், மூன்றி லொரு பங்கு தூரத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியாகும்,

4. தன்னுடைய புள்ளிகளுள் ஒன்றே ஒன்று நிலையாயிருக்க, ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருள் சமநிலையில் இருந்தால், அப்பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அந்நிலையான புள்ளி வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோட்டில் இருக்கும்.

O என்பது அப்பொருளினது நிலையான புள்ளி ஆகுக. G என்பது அதன் புவியீர்ப்பு மைய மாகுக,

அப்பொருளின் மீது தாக்குகின்ற விசைகளாவன :

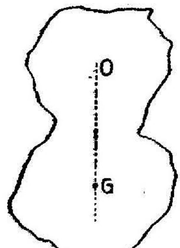
(1) அப்பொருளின் நிலையான புள்ளியிலுள்ள எதிர்த் தாக்கம்;

(2) அப்பொருளினுடைய கூறுப் பகுதிகளுடைய எடைகளுமே.

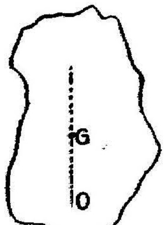
இக் கூறுப் பகுதிகளுடைய எடைகள், அப்பொருளின் புவி யீர்ப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும்.

இனி, இரு விசைகள் ஒரு பொருளைச் சமநிலையில் வைத்திருக்கும் போது, அவை ஒன்றுக்கொன்று சமனாயும் எதிராயு மிருத்தலே யன்றி, அவற்றிற்கு ஒரே தாக்கக் கோடும் இருத்தல் வேண்டும்.

ஆகவே, G யின் வழி வரையும் நிலைக்குத்துக் கோடு O என்ற புள்ளி வழிச் சென்றாலன்றித் தாக்கக் கோடுகள் ஒன்றாகா.



படம் -127(i)



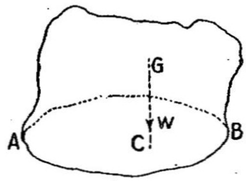
படம்-127(ii)

இரு வகைகள் எழுகின்றன; புவி யீர்ப்பு மையம் G ஆனது தொங்க விடும் புள்ளி O யிற்குக் கீழே இருப்பது முதலாம் வகை; G ஆனது O யிற்கு மேலே இருப்பது இரண்டாம் வகை.

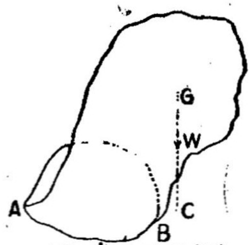
முதலாம் வகையில், சமநிலையில் இருக்கும்போது அப்பொருள் சிறிது பெயர்க்கப்பட்டால், அது இந்நிலைக்குத் திரும்பி வர முயலும். இரண்டாம் வகையில் அப்பொருள் சமநிலையை அடைய முயலாது,

5. ஒரு பொருளானது தன்னடி ஒரு கிடைத்தளத்தைத் தொடும் படி வைக்கப்பட்டால், அப்பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு அத்தளத்தை அவ்வடியின் உள்ளே அல்லது வெளியே சந்திப்பதற் கேற்ப, அது நிற்கும் அல்லது விழும்.

அப்பொருளின் மீது தாக்குகின்ற விசைகள், அதன் புவி யீர்ப்பு மையம் Gயிலே தாக்குகின்ற அதன் எடையும், அப்பொருளின்



படம்-128(i)



படம்-128(ii)

அடியிலுள்ள வெவ்வேறு புள்ளிகளிலே தாக்குகின்ற அத்தளத்தினுடைய எதிர்த் தாக்கங்களுமே.

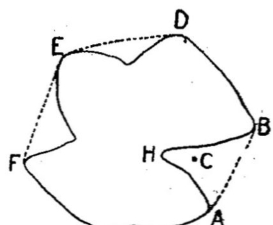
இவ்வெதிர்த் தாக்கங்ளெல்லாம் நிலைக்குத்தானவை, எனின், அவை அடியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற ஒரு தனி நிலைக்குத்து விசையாகச் சேர்க்கப்படலாம்.

இரண்டு ஒத்த இணை விசைகளின் விளைவு, அவ்விசைகளின் தாக்கப் புள்ளிகளுக்கு உள்ளே யுள்ள ஒரு புள்ளியில் எப்போதும் தாக்குகின்ற மையால், அப்பொருளின் அடியின் மீதுள்ள எல்லா வெதிர்த் தாக்கங்களின் விளைவு, அவ்வடிக்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளி வழித் தாக்க மாட்டா தென்பது தெளிவு.

எனின், அப்பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வழிச் செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு அத்தளத்தை அடிக்கு வெளியிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால், அவ்விளைவு எதிர்த் தாக்கத்தாற் சமநிலையை யடையாது. ஆகவே, அப்பொருள் சமநிலையில் இருத்தல் இயலாது. ஆனால், அது கவிழல் வேண்டும்.

குறிப்பு

அப் பொருளின் அடி, படத்தில் காட்டியபடி, ஒருள்ளுறுகோணமுடைய ஒருருவமாயின், விவரணத்திலுள்ள "அடி" என்னும் சொல்லின் கருத்தை, வடிவ கணித அடியைச் சுற்றி இறுக்கமாக ஓரிழைத் துண்டை இழுப்பதாற் பெறப்படுகின்ற உருவத்திலுள்ள பரப்பைக் கருதுமாறு கொள்ளல் வேண்டும். ஆகவே, படத்தில் உள்ள உருவத்தில் அடி என்னும் சொல் AB DE FA என்னும் பரப்பைக் குறிக்கிறது.



படம்-129

உதாரணமாக, விளைவெதிர்த் தாக்கம் தாக்குகின்ற புள்ளி C என்பது AHB என்னும் பரப்பிற்குட் கிடக்கலாம். ஆனால், அது புள்ளியிடப் பட்ட கோடு AB என்பதற்கு வெளியே கிடத்தல் இயலாது.

புள்ளி C என்பது, A, B என்பனவற்றிற்கு இடையில் AB என்னும் கோட்டின் மீது கிடந்தால், அப்பொருள் கவிழு நிலையில் இருக்கும்.

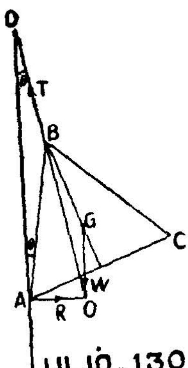
6 உதாரணம் 1

ABC என்னும் ஒரு சீர்ச் சமபக்க முக்கோணம், அதன் கோணம் A ஆனது மழமழப்பான ஒரு சுவரைத் தொட்டுக் கொண்டு இருக்கும் படி, A யிற்கு நிலைக்குத்தாக மேலேயுள்ள D என்னும் புள்ளிக்கும், B க்கும் தொடுக்கப்பட்ட BD என்னும் ஓரிழையினாலே தாங்கப் படுகிறது. அச்சுவரிலிருந்து B, C என்பனவற்றினுடைய தூரங்கள் 1 : 5 என்னும் விகிதத்தில் உள்ளன வெனக் காட்டுக.

$\angle BAD = \theta$ என்க

$BD = BA$ என்பதால்

$\angle BDA = \angle BAD = \theta$ ஆகும்.



படம்-130

சுவரிலிருந்து B, C என்பனவற்றின் தூரம் h,k ஆகுக. A யிலுள்ள சுவரின் எதிர்த் தாக்கம் R, முக்கோணத்தின் எடை W, இழையிலுள்ள இழு விசை T என்பனவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் O வில் சந்திக்கட்டும்.

விசைகளை நிலைக்குத்தாகப் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$W = T \cos\theta \qquad (1)$$

முக்கோணத்தின் எடை W என்பதை A, B, C என்ற அதன் உச்சிகளில் வைத்த $\frac{W}{3}$ என்ற மூன்று சம எடைகளால் மாற்றீடு செய்து, A பற்றித் திருப்புத் திறன்கள் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\frac{W}{3}.h + \frac{W}{3}\ k = T.\ AB \sin 2\theta \qquad (2)$$

(1) லிருந்து பிரதியீடு செய்ய நாம் பெறுவது

$$\frac{W}{3}h + \frac{W}{3}k = a.\ 2\ W \sin\ \theta$$

$$\therefore h + k = 6\ a \sin\ \theta$$

ஆனால், $h = a \sin\ \theta$

$$\therefore\ k = 5\ a \sin\ \theta;\ h = a \sin\ \theta$$

$$\therefore\ h : k = 1 : 5$$

உதாரணம் 2

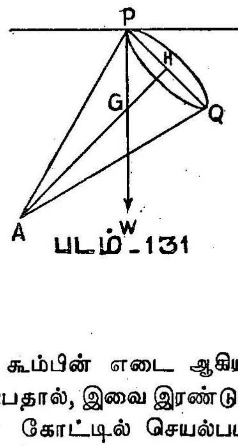
தன்னடியின் ஆரையைப் போல் நான்கு மடங்கு உயரங் கொண்டே ஒரு கூம்பு, தன்னடியின் பரிதியிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொங்க விடப்படுகின்றது. அதன் அடியும், அச்சும் நிலைக்குத்திற்குச் சமமாகச் சாய்ந்து கிடக்க, அது ஒய்விலிருக்கு மெனக் காட்டுக,

அடியின் பரிதியிலுள்ள P என்னும் புள்ளியிலிருந்து கூம்பு தொங்கவிடப்படட்டும்,

கூம்பின் உச்சியை A என்றும், அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தை G என்றும் குறிப்போம்.

கூம்பின் அச்சு AH ஆகுக,

கூம்பின் மேல் செயல்படும் விசைகளாவன:



படம்-131

1. Pயில் உள்ள எதிர்த் தாக்கம்

2. Gவழி நிலைக்குத்தாகச் செயல்படும் கூம்பின் எடை ஆகிய, இவ்விரு விசைகளும் கூம்பைச் சமநிலையில் வைப்பதால், இவை இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்று சமனு மெதிருமாக ஒரே கோட்டில் செயல்பட வேண்டும்

ஆகவே, PG நிலைக்குத்தாக இருக்கும்.

இப்பொழுது, $AH = 4\ PH$ (தரப்பட்டது.)

G புவி ஈர்ப்பு மையமாதலால்

$AH = 4\ HG$ (இவ்வதிகாரம், பிரிவு 3—×)

$$\therefore HG = HP$$

$$\therefore\ \angle HPG = \angle HGP$$

ஆகவே. கூம்பின் அடியும், அச்சும் நிலைக்குத்திற்குச் சமமாகச் சாய்ந்து கிடக்கும்.

பயிற்சி 10·1

1. இரு சமபக்க முக்கோணத் தகடு ஒன்றிற்கு 5 டெசி மீட்டர் நீளமான சமபக்கங்களும், 6 டெசி மீட்டர் நீளமான அடியும் உண்டு. ஒவ்வொரு பக்கத்தினின்றும் அதன் புவியீர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க.

2. மூன்று மனிதர், ஒரு எடை W என்பதை, மழமழப்பான ஒரு முக்கோணப் பலகையின் மீது வைத்து அதன் கோணப் புள்ளிகளைத் தம் தோள்கள் மீது வைத்துத் தூக்கிக்கொண்டு செல்கிறார்கள். w என்பது அம் முக்கோணப் பலகையின் எடையாயின், ஒவ்வொரு மனிதனும் தாங்கும் எடையைக் காண்க.

3. ABCD என்னும் ஒரு சீர்ச் சரிவகத் திண்மத் தகடொன்றின் பக்கம் CD என்பது தனக்கு எதிராகவும், சமாந்தரமாகவும் உள்ள AB யைப் போல இரு மடங்கு. AB, CD என்பனவற்றிலிருந்து ABCD என்பதன் புவி யீர்ப்பு மையத்தினுடைய தூரங்களை ஒப்பிடுக.

4. ABCD என்னும் ஒரு சீர் நாற்கரத்தின் பக்கங்கள் AB, AD என்பனவும், அதன் மூலை விட்டம் AC என்பதும் சமம். கோணங்கள் BAC, CAD என்பன முறையே 30°, 60° ஆக உள்ளன. புள்ளி B யில் ABC என்னும் முக்கோணத்தினது எடையின் மூன்றி லிரண்டு பங்குக்குச் சமனை ஒரு எடையைத் தொடுத்து முழுவதையும் புள்ளி A யிலிருந்து தொங்கவிட்டால், மூலை விட்டம் AC என்பது நிலைக்குத் தாகுமெனக் காட்டுக.

5. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தினது தளத்திலுள்ள O என்னும் ஒரு புள்ளியில் OA, OB, OC என்பனவற்றாற் குறிக்கப்படும் மூன்று விசைகளானவை தாக்குகின்றன. இம் மூன்று விசைகளும் சமநிலை அடையுமாறு O என்னும் புள்ளி எங்கு இருத்தல்வேண்டும்?

6. P என்னும் ஒரு துகள் A, B, C என்னும் மூன்று புள்ளிகளுக்கு முறையே μ.PA, μ.PB, μ.PC என்பனவற்றிற்குச் சமமான விசைகளால் கவரப்படுகின்றது. G என்பது ABC என்னும் முக்கோணத்தின் புவியீர்ப்பு மையமாயின், விளைவு 3μ. PG எனக் காட்டுக.

7. P என்னும் ஒரு துகள் A, B, C, D,.. என்னும் புள்ளிகளின் முகமாக $\lambda\cdot$ PA, μ.PB, ν. PC, ξ. PD என்பனவற்றாற் குறிக்கப்

படுகின்ற விசைகளாலே தாக்கப்படுகின்றது. G என்பது A, B, C, D... என்பனவற்றினூலே முறையே $\lambda, \mu, \nu, \xi, \ldots$ என்பனவற்றிற்கு விகித சமமாக வைக்கப்பட்ட எடைகளின் புவி யீர்ப்பு மையமாயின், அவற்றின் விளைவு $(\lambda+\mu+\nu+\ldots\ldots)$ PG எனக் காட்டுக.

(இது அதிகாரம் 2, பிரிவு 12 இல் உள்ள தேற்றத்தின் பொது வடிவாகும். இதனை அப்பிரிவினுடைய தொடர்ந்த பிரயோகங்களாலே நிறுவலாம்)

8. ஒரு சீர்க் கோலொன்று தன்னுடைய முனைகளிலே இணைக்கப்பட்ட இரண்டு இழைகளாலே தூக்கப்படுகிறது. அவ்விழைகளுடைய மற்றை முனைகள், ஒரு நிலையான புள்ளிக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவ்விழைக்களுடைய இழுவிசைகள் அவற்றினுடைய நீளங்களுக்கு விகிதசமமெனக் காட்டுக.

தன்னுடைய கோணப் புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்ட மூன்று இழைகளாலே தூக்கப்படும் ஒரு சீர் முக்கோணத் தகடொன்றுக்கும் அதே தொடர்பு உண்மையாகு மெனக் காட்டுக.

9. தன் பக்கங்கள் 3, 4, 5 என்னும் செ. மீ. நீளமான ஒரு சீர் முக்கோணத் தகடொன்று, மிக நீண்ட பக்கத்தின் மையத்திலிருந்து ஓரிழையினூலே தூக்கப்படுகின்றது. நிலைக்குத்திற்கு, இப்பக்கத்தின் சாய்வைக் காண்க.

10. ஒரு செங்கோண முக்கோண வடிவங் கொண்ட ஒரு சீர்த் தகடொன்றின் செங்கோணத்தை அமைக்கும் பக்கங்களுள் ஒன்று, மற்றைப் பக்கத்தின் மும்மடங்கு. அம்முக்கோணம், செங்கோணத்திற்கு இணைக்கப்பட்ட ஓரிழையினூலே தூக்கப்படுகின்றது. அது சமநிலையில் இருக்கும்போது, செம்பக்கம் நிலைக்குத்திற்கு $\sin^{-1}\frac{3}{5}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கிற தெனக் காட்டுக.

11. ABC என்னும் முக்கோணத் தகடு முதலில் A யிலிருந்தும் பிறகு B யிலிருந்தும் தொங்கவிடப்படுகிறது. AB என்னும் பக்கத்தின் இரு நிலைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாய் இருந்தால், $5c^2=a^2+b^2$ எனக் காட்டுக.

12. தன் அடியின் ஆரை a ஆகவும், தன் உயரம் h ஆகவு முள்ள ஒருருளை ஒரு சாய்தளத்தின் மீது வைக்கப்பட்டு, வழுக்குதலினின்றும் தடுக்கப்படுகிறது. அத்தளத்தின் சாய்வு படிப்படியாகக் காட்டப்பட்டால், அவ்வுருளை எப்பொழுது கவிழு மெனக் காண்க,

13. 18 கன செ. மீ அளவுள்ள ஒருலோகத் துண்டு 30° சாய்வுள்ள ஒரு சாய்தளத்தின் மீது, தன்னடி கிடக்கின்ற ஒருருளையாக ஆக்கப்பட்டு. வழுக்குதலினின்றும் தடுக்கப்படுகின்றது. அவ்வுருளை மட்டாகக் கவிழாதிருக்கும்வண்ணம், எவ்வுயரம் கொண்டதாக ஆக்கப்படவேண்டும்?

14. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்தகடு தன்விளிம்பு AB என்பது மழமழப்பான ஒரு மேசையைத் தொட்டுக் கொண்டிருக்க, ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே மட்டாக ஓய்விலிருக்கு மாயின், $BC^2 - AC^2 = 3AB^2$ எனக் காட்டுக

15. ABC என்பது எடை W ஆகவும், கோணம் A என்பது 120° ஆகவுமுள்ள இரு சமபக்க முக்கோணம். அம் முக்கோணத்தினது தளம் நிலைக்குத்தாக இருக்க, AB என்னும் பக்கம் மழமழப்பான ஒரு கிடை மேசையின் மீது கிடக்கின்றது. இப்பொழுது $\frac{W}{3}$ என்னும் எடை C யிலே தொங்கவிடப்பட்டால், அம் முக்கோணம் கவிழ நிலையிலே மட்டாக நிற்கு மெனக் காட்டுக.

16. C யில் விரிகோணமுள்ள ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத் தகடு, தன் பக்கம் AC ஆனது ஒரு மேசையைத் தொடும்படியாக நிற்கின்றது. W என்பது அம்முக்கோணத்தின் எடையாயின் B யிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டு அம்முக்கோணத்தைக் கவிழ்க்கும் மிகச் சிறிய எடை $\frac{1}{3}W\,\frac{a^2+3b^2-c^2}{c^2-a^2-b^2}$ எனக் காட்டுக.

$c^2 > a^2 + 3b^2$ எனின், மேலுள்ள விடையை விளக்குக.

17. W எடையுடைய ஒரு சீர்ச் சதுரத் தட்டு ABCD என்பதன் பக்கம் CD என்பது E யில் இரு சமக்கூறிடப்பட்டு, முக்கோணம் AED என்பது வெட்டி எடுக்கப்படுகின்றது AB CE A என்னும் தகடு, தன் பக்கம் CE என்பது ஒரு கிடைத் தளத்திற் கிடக்கும்படி ஒரு நிலைக்குத்தான நிலையில் வைக்கப்படுகின்றது. அத்தட்டைக் கவிழ்க்காது A யில் வைக்கக் கூடிய மிகப் பெரிய எடை யாது?

7. புவியீர்ப்பு மையம் காணப் பொதுச் சூத்திரங்கள்

தேற்றம் 1

தம் எடைகள் $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots\ldots\ldots \omega_n$ என்பனவாகிய துகள் தொகுதி ஒரு நேர் கோட்டிலே கிடக்க, நிலையான ஒரு புள்ளி

Oவிலிருந்து அளக்கப்பட்ட அவற்றினுடைய தூரங்கள் $x_1, x_2, x_3 \ldots xn$ என்பனவாயின், அந்நிலையான புள்ளியிலிருந்து அவற்றின் புவிஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\bar{x}$ எனில்,

$$\bar{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \ldots\ldots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots + \omega_n}$$ எனப் பெறலாம்.

அத் துகள்களின் எடைகள் ஒரு சமாந்தர விசைத் தொகுதியாகும்.

அவற்றின் விளைவு $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots$ என்பதற்குச் சமம்.

அன்றியும், அவற்றினுடைய தளத்திலுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கும் இவ்விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை, அவற்றின் விளைவினது திறனுக்குச் சமமாகும்.

ஆனால், நிலையான புள்ளி O பற்றி எடுக்கும் அவ்விசைகளுடைய திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகை

$$\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots\ldots + \omega_n x_n$$

அன்றியும், $\bar{x}$ என்பது, O விலிருந்து புவிஈர்ப்பு மையத்தினது தூரமெனின், விளைவினது திருப்புத் திறன்

$$= (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots + \omega_n)\,\bar{x}$$

எனின், $\bar{x}\,(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots + \omega_n) = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots + \omega_n x_n$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots\ldots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \ldots\ldots + \omega_n}$$

தேற்றம் 2

எடைகள் $\omega_1, \omega_2, \ldots\ldots \omega_n$ என்பனவாயுள்ள துகள்களுடைய தொகுதி ஒரு தளத்திலே கிடக்க, OX, OY என்பன அத்தளத்திலே செங்கோணத்திலுள்ள இரண்டு நிலையான நேர் கோடுகளாவும், OX லிருந்து அத்துகள்களுடைய தூரங்கள் $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ என்பனவாகவும், அவற்றின் புவிஈர்ப்பு மையத்தினது தூரம் $\bar{y}$ ஆகவும் இருந்தால்,

$$\bar{y} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3 + \ldots + \omega_n y_n}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n}$$

அதுபோல, OY யிலிருந்து அத்துகள்களின் தூரங்கள் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பனவாகவும், அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரம் $\overline{x}$ ஆகவும் இருந்தால்,

$$\overline{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \ldots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n}$$

எல்லா எடைகளுடைய புவி ஈர்ப்பு மையமாகிய Gயிலே தாக்கு கின்ற விளைவு எடை $(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n)$ என்பது கூற்று எடைகள் $\omega_1, \omega_2 \ldots$ என்பனவற்றிற்குச் சமமாகையால், கோடு OX என்பது நிலை யான ஒரு அச்சு எனக் கொள்ளப்படின், இந்நிலையான அச்சு பற்றி, அக் கூற்று எடைகளுக்குள்ள திருப்புத் திறன்களும், அவ்விளைவின் திருப்புத் திறனும் ஒன்றுகும். ஆனால், அவ்விளைவின் திருப்புத் திறன்

$$= (\omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots + \omega_n)\,\overline{y}$$

அந்த எடைகளின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத்தொகை $\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots + \omega_n y_n$

$$\text{ஆகவே, } \overline{y} = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \ldots + \omega_n y_n}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots \omega_n}$$

$$\text{இவ்வாறே } \overline{x} = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 \ldots + \omega_n x_n}{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n}$$

தேற்றம் 2 இன் பொது வடிவம்

ஒரு துகள் தொகுதியின், தளத்திலுள்ள யாதேனு மொரு கோட்டி லிருந்து, அத்தொகுதியின் புவிஈர்ப்பு மையத்தினது தூரம், ஒவ்வொரு எடையையும், அந்தக் கோட்டிலிருந்து அதன் தூரத்தாற் பெருக்கு வரும் பெருக்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைத் தன் தொகுதியாகவும், எடைகளின் கூட்டுத் தொகையைத் தன் பகுதியாகவும் கொண்ட பின்னத்திற்குச் சமம்.

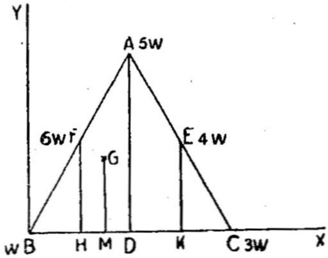
(அ-து) புவிஈர்ப்பு மையத்தினது தூரம் அத்துகள்களுடைய நிறையிட்ட சராசரி தூரத்திற்குச் சமன் எனக் கூறலாம்.

8 உதாரணம் 1

ABC என்பது 24 செ. மீ. நீளமான பக்கங் கொண்ட சமபக்க முக்கோணம். A, B, C என்பனவற்றில் 5, 1, 3 என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான எடைகளும், BC, CA, AB என்பனவற்றினுடைய

மையங்களில் 2, 4, 6 என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான எடைகளும் வைக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் புவிசார்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

தம்மிலிருந்து தூரங்கள் அளக்கப் படும் இரண்டு நிலையான கோடு களில் ஒன்று, BC யுடன் பொருந் தும் BX என்னும் கோடாகவும், மற்றையது BX ற்குச் செங்குத் தாக உள்ள BY என்னும் கோடா கவும் கொள்வோம்.



படம் 132

BC, CA, AB என்பனவற்றின் மையப் புள்ளிகளை D, E, F என்னும் கொடுக்கப்பட்ட எடைகளை, 5W, W, 3W, 2W, 4W, 6W என்றும், தொகுதியின் புவிசார்ப்பு மையத்தை G என்றும் குறிப்போம்.

ABC சமபுக்க முக்கோண மாதலாலும், D யானது BC யின் மையப் புள்ளியாதலாலும், AD யானது BC க்குச் செங்குத்தாகும்.

FH, GM, EK என்பனவற்றை BC க்குச் செங்குத்தாக வரைக.

இப்பொழுது, AB=BC=CA=24 செ. மீ. BH=6 செ. மீ; BD=12 செ. மீ; BK=18 செ. மீ

$$AD=12\sqrt{3}\text{ செ. மீ};\quad FH=EK=6\sqrt{3}\text{ செ. மீ.}$$

$$\text{ஆகவே, } BM=\frac{2W\times 12+3W\times 24+4W\times 18+5W\times 12+6W\times 6}{W+2W+3W+4W+5W+6W}$$

$$=\frac{88}{7}\text{ செ. மீ.}$$

$$MG=\frac{2W\times O+3W\times O+4W\times 6\sqrt{3}+5W\times 12\sqrt{3}+6W\times 6\sqrt{3}}{W+2W+3W+4W+5W+6W}$$

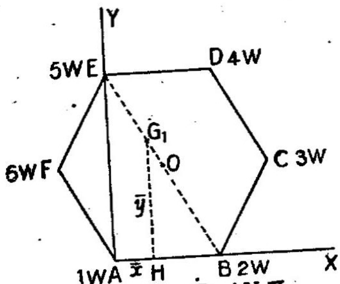
$$=\frac{40\sqrt{3}}{7}\text{ செ. மீ.}$$

$$\text{ஆகவே; } BG=\sqrt{BM^2+MG^2}=16\text{ செ. மீ.}$$

உதாரணம் 2

1, 2, 3, 4, 5, 6 என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான எடைகள் ஓரொழுங்கில் எடுத்த ஓரொழுங்கான அறு கோணக் கோணப்

புள்ளிகளிலே வைக்கப்பட்டால், அவைகளின் புவிஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.



படம்-133

ABCDEF என்பது ஓர் ஒழுங்கான அறுகோண மாகுக.

அதன் பக்கம் 'a' என்க. கோண முனைகளில் உள்ள எடைகள் W, 2W, 3W, 4W, 5W, 6W எனக் கொள்வோம்.

A என்பதை ஆதியாகவும், AB, AE என்பனவற்றை முறையே x, y அச்சுகளாகவும் கொள்வோம்,

எடைகளின் புவிஈர்ப்பு மையம் G எனில், அதன் ஆயத் தொலைகளை $\bar{x}, \bar{y}$ எனக் குறிப்போம்.

அப்பொழுது,

$$\bar{x} = \frac{W\times o+2W\times a+3W(a+a\cos 60°)+4W\times a+5W\times o+6W\times(-a\cos 60°)}{W+2W+3W+4W+5W+6W}$$

$$= \frac{5}{14}$$

$$60°\,\bar{y} = \frac{W\times o+2W\times o+3W\times a\sin 60+4W\times 2a\sin 60°+5W\times 2a\sin + 6W\times a\sin 60°}{W+2W+3W+4W+5W+6W}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}\,a}{14}$$

வேறு வழி

அறுகோணத்தின் மூலை விட்டங்கள் 'o' என்னும் புள்ளியில் வெட்டிக் கொண்டால், O என்பது அறுகோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் மையமாகும். அச்சுற்று வட்டத்தின் ஆரை $=OA=BC=a$

இப்பொழுது, $6W+W=4W+3W$ என்பதால், அத் தொகுதியின் புவிஈர்ப்பு மையம் BE யில் இடம் பெறும்.

$$\therefore\ BG = \frac{3W\times\frac{a}{2} + 4W\times\frac{3a}{2} + 5W\times 2a + 6W\times\frac{3a}{2} + W\times\frac{a}{2}}{W+2W+3W+4W+5W+6W}$$

$$= \frac{27}{21}a = \frac{9}{7}a$$

$$\therefore\ OG = \frac{2}{7}a$$

குறிப்பு

முதல் வழியின் படி, $AH = \frac{5}{14}a;\ HG = \frac{9\sqrt{3}}{14}a$

$$\therefore\ HB = a - \frac{5}{14}a = \frac{9}{14}a$$

$$\therefore\ BG^2 = HB^2 + HG^2 = \left(\frac{9}{14}a\right)^2 + \left(\frac{9\sqrt{3}}{14}a\right)^2$$

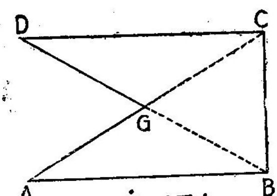
$$= \left(\frac{9}{14}\right)^2 \times (a^2 + 3a^2) = \left(\frac{9}{14}\right)^2 \times 4a^2$$

$$\therefore\ BG = \frac{9}{14}\times 2a = \frac{9}{7}a$$

ஆகையால், இரு வழியிலும் நமக்குக் கிடைத்த விடை ஒன்றே யாகும்

உதாரண 3

ABCD என்னும் செவ்வகத்தின் மூலை விட்டங்கள் G யில் வெட்டிக கொள்கின்றன. GABCDG என்னும் உருவத்தில் வளைக்கப்பட்ட ஒரு சீரான கம்பி, தன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G யில் கொண்டுள்ள தெனில், $AB = \sqrt{3}\ BC$ எனக் காட்டுக.



படம்-134

AB, BC என்பவற்றை முறையே 2a, 2b எனக் கொள்வோம்.

ஆயின் $AG = GC = \sqrt{a^2+b^2}$

AB யை x அச்சாகவும், ADயை y அச்சாகவும் எடுக்கவும்.

இப்பொழுது ABயின் மையப் புள்ளி ஆயத்தொலைகள் (a,o)

BCயின் மையப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(2a, b)$

CDயின் மையப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(a, 2b)$

DGயின் மையப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}b)$

AGயின் மையப் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b)$

இனி, GABCDG என்னும் உருவத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க.

AB, BC, CD, DG AG என்பனவற்றின் எடைகள் முறையே $2a, 2b, 2a, \sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2+b^2}$ என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாகும்.

ஆகவே, $$\bar{x} = \frac{2a \cdot a + 2b \cdot 2a + 2a \cdot a + \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{2}a + \sqrt{a^2+b^2} \cdot \frac{1}{2}a}{2a+2b+2a+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$= \frac{4a^2+4ab+a\sqrt{a^2+b^2}}{4a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\bar{y} = \frac{2b^2+4ab+2b\sqrt{a^2+b^2}}{4a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}} = b$$

ஆனல், புவி ஈர்ப்பு மையம் Gயில் உள்ளது.

எனின் $\bar{x}=a; \quad \bar{y}=b$

$$\therefore \frac{4a^2+4ab+a\sqrt{a^2+b^2}}{4a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}} = a$$

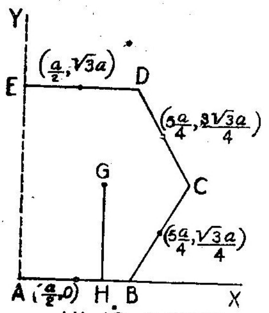
$\therefore 3b^2=a^2$ (அ-து) $3(2b)^2=(2a)^2$

$\therefore 3BC^2=AB^2$

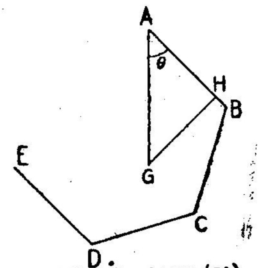
$\therefore AB=\sqrt{3}\,BC$

உதாரணம் 4

நான்கு சமகோல்களால் கூடிய ஒரு விறைப்பான வரைச் சட்டம் ABCDE என்பது ஒரு அறுகோணத்தின் பாகமாகும். அது A யிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. நிலைக்குத்துடன் AB உண்டாக்கும் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ எனக் காட்டுக.



படம்-135(i)



படம்-135(ii)

AB யையும், A வழியாக AB க்குச் செங்குத்தாக உள்ள AE யையும் ஆயங்களாகக் கொள்வோம்.

AB, BC, CD, DE என்பனவற்றின் மையப் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே $\left(\frac{1}{2}a, o\right)$; $\left(\frac{5}{4}a, \frac{1}{4}\sqrt{3}a\right)$; $\left(\frac{5}{4}a, \frac{3}{4}\sqrt{3}a\right)$; $\left(\frac{1}{2}a, \sqrt{3}a\right)$ என்பன வாகும்

AB, BC, CD, DE என்னும் நான்கு சமகோல்களால் கூடிய வரைச் சட்டத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம் $(\overline{x}, \overline{y})$ என்க.

$$\text{ஆயின், } \overline{x} = a\left(\frac{1}{2}a + \frac{5}{4}a + \frac{5}{4}a + \frac{1}{2}a\right)/4a$$

$$\therefore \overline{x} = \frac{7}{8}a$$

$$\overline{y} = a\left(o + \frac{1}{4}\sqrt{3}a + \frac{3}{4}\sqrt{3}a + \sqrt{3}a\right)/4a$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{3}a$$

GH என்பது ABக்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்டால், $AH = \frac{7}{8}a$; $HG = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$

அந்த வரைச் சட்டம் A லிருந்து தொங்கவிடும்போது, படம் (ii) இல் உள்ளது போல், AG நிலைக்குத்தாக இருக்கும்.

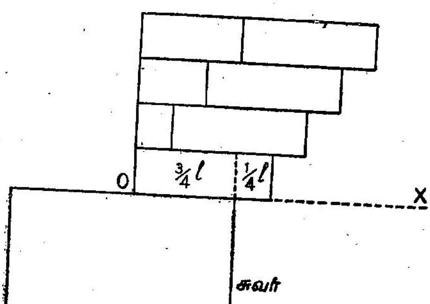
நிலைக்குத்துடன் AB யின் சாய்வு θ எனில்,

$$\tan\theta = GH/AH = 4\sqrt{3}/7$$

ஆகவே, $\theta = \tan^{-1}(4\sqrt{3}/7)$

உதாரணம் 5

ஒரு செங்கல், தனது நீளத்தின் காற்பங்கு ஒரு சுவரின் விளிம்பிற்கு வெளியே நீண்டிருக்கும்படி வைக்கப்பட்டிருக்கின்றது. பின்னர், ஒரு செங்கல்லும், ஒரு செங்கல்லிற் காற்பங்கும், முதலாம் செங்கல்லின் விளிம்பிற்கு வெளியாக ஒரு செங்கல்லின் கால் பங்கு நீண்டிருக்கும்படி அம்முதலாவதன் மீது வைக்கப்படுகின்றன. ஒரு செங்கல்லும், அதன் ஒரரையும் இதன் மீது வைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறே, பிறவும் வைக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு, நாலொழுங்கு செங்கற்கள் வைக்கப்பட்டால், அவை பூசு சாந்தின்றிச் சமநிலையில் இருக்குமென்றும், ஐந்தாம் ஒழுங்கு வைக்கப்படின் அக்கட்டுக் கவிழு மென்றும் காட்டுக.



படம் - 136

செங்கற்களின் புவிசர்ப்பு மையங்களின் வழியாகச் சுவரின் விளிம்பிற்குச் செங்குத்தாக வெட்டு முகம் எடுக்க.

நாலொழுங்கு செங்கற்களில் மிகக் கீழாகச் சுவரின் மீதுள்ள செங்கல்லின் பக்கத்தின் மையப் புள்ளி O ஆகுக. OX என்பது சுவரின் விளிம்பிற்குச் செங்குத்தாக வரையப்பட்ட நிலையான கோடாகுக.

ஒரு செங்கல்லின் எடை W ஆகவும், நீளம், l ஆகவும் கொள்க,

O விலிருந்து இந்நான்கு அடுக்குகளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\overline{x}$ எனில், நாம் பெறுவது,

$$\overline{x} = \frac{W.\frac{l}{2} + \frac{5W}{4}.\frac{5l}{8} + \frac{3W}{2}\frac{3l}{4} + .\frac{7W}{4}.\frac{7l}{8}}{W + \frac{5W}{4} + \frac{3W}{2} + \frac{7W}{4}} = \frac{63}{88}\, l.$$

$$\therefore\ \overline{x} < \frac{3l}{4}$$

ஆகவே, நாலொழுங்கு செங்கற்களின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வழியாக வரையும் செங்குத்துக் கோடு சுவரைச் சந்திக்கின்றது.

இனி, ஐந்தாம் ஒழுங்கு வைக்கப்பட்டால், நாம், மேலுள்ள தொகுதிக்கு $2\,W\cdot l$ என்ற உருப்பையும், பகுதிக்கு 2W என்ற உருப்பையும் சேர்க்கவேண்டும்.

அப்பொழுது $\overline{x} = \frac{19\,l}{24}$ (அ-து) $\overline{x} > \frac{3l}{4}$

ஆகவே, அக்கட்டுக் கவிழும்.

பயிற்சி 10.2

1. AB, BC, CD என்பன மூன்று சமமான சீர்க் கோல்கள் அவை ஓரொழுங்கான அறுகோணத்தினுடைய மூன்று அடுத்து வரும் பக்கங்களாயிருக்கும் வண்ணம் உறுதியாக இணைக்கப்பட்டுப் புள்ளி A யிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகின்றது. CD என்பது கிடையாகக் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

2. மெல்லிய ஒரு சீர்க் கம்பித் துண்டொன்று ABCD என்னுமொரு நாற் பக்க வுருவமாக வளைக்கப்படுகின்றது. அவ்வுருவத்தில் AB, CD என்பன சமாந்தரம். BC, DA என்பன AB க்குச் சமச்சாய் வுள்ளன. AB என்பது 18 செ. மீ. ஆகவும், CD என்பது 12 செ. மீ. ஆகவும், BC, DA என்பன ஒவ்வொன்றும் 5 செ. மீ. ஆகவும் இருந்தால், AB யிலிருந்து அக்கம்பியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க.

3. ABCD என்னும் சரிவகப் பரப்பில் சமாந்தரமாய் உள்ள AB, CD என்ற பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a, b ஆகும். AB, CD

என்பனவற்றிற்கு இடையே யுள்ள தூரம் h எனில், அப்பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் ABயிலிருந்து $\frac{1}{3}h\frac{a+2b}{a+b}$ என்னும் தூரத்தில் உள்ள தெனக் காண்டி.

4. 2, 3, 2, 6, 9, 6 என்னும் கிலோ கிராம் எடைகள் ஓரொழுங்கில் எடுத்த ஓரொழுங்கான அறுகோணத்தினுடைய கோணப் புள்ளிகளிலே வைக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

5. 5, 4, 6, 2, 7, 3 என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமான எடைகள் ஓரொழுங்கில் எடுத்த ஓரொழுங்கான அறு கோணப் புள்ளிகளிலே வைக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அவ்வறு கோணத்தின் மைய மெனக் காட்டுக.

6. 100 கிராம் எடையுள்ள ஒரு சதுரத் தகட்டினுடைய ஒழுங்காக எடுத்த கோணப் புள்ளிகளில் முறையே 30, 60, 50, 10 என்னும் கிராம் எடைகள் இணைக்கப்படுகின்றன. அத்தகட்டின் பக்கம் 25 செ. மீ. ஆயின், அத்தொகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மைய நிலையைக் காண்க.

7. OAB என்பது எடையில்லாத முக்கோணம் ஒன்று. அதன் அடிப் பக்கத்தின் நீளம் 6 செ. மீ. அதன் சமபக்கங்கள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் 5 செ. மீ. O, A, B என்னும் புள்ளிகளில் 10, 20, 30 என்னும் கிராம் எடைகள் கொண்ட துகள்கள் வைக்கப்படுகின்றன. அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

8. ஒரு காலியான கனச் சதுரப் பெட்டியின் மூடி 45° கோணச் சாய்வில் திறந்து வைக்கப்படுகின்றது. பலகையின் கனத்தைப் புறக் கணித்து, அப்பெட்டியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

9. சாய்வுக் கோணம் 60° உள்ள ஒரு சாய்தளம் 3 டெசி மீட்டர் நீளமானது. 7, 5, 4, 8 என்னும் கிராம் எடைகள், அத்தளத்தின் மீது ஒழுங்காக 1 டெசி மீட்டர் தூரத்திலும், பின்னது மிக்க உயரத்திலும் இருக்கும்படியாக வைக்கப்படுகின்றன, அச்சாய்தளத்தின் அடியிலிருந்து அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க.

10. AB, BC, CD என்பன ஓர் ஒழுங்கான பல் கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களாக இருக்கும் வண்ணம், ஒரு சீர்க் கம்பி வளைக்கப் படுகின்றது. A யிலிருந்து தொங்கவிடும்போது AC நிலைக்குத்தாக

இருக்கக் கம்பி ஒய்விலிருக்கிறது. அப்பல் கோணம் ஓர் ஒழுங்கு அறு கோண மெனக் காட்டுக.

11. AB என்னும் ஒரு சீர்க் கோலொன்று n செ. மீ. நீளமும், (n+1)W என்னும் எடையும் உடையது. அக்கோலுக்கு W, 2W, 3W, ...nW என்னும் எடைகள் A யிலிருந்து முறையே 1, 2, 3, ... n செ. மீ. என்னும் தூரங்களில் இணைக்கப்பட்டுள்ளன. A யிலிருந்து அக்கோலும், எடைகளும் சேர்ந்த தொகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க.

12. பக்கங்களின் விகிதம் 3 : 4 : 5 ஆக இருக்கும்படி, 24 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பி ஒரு முக்கோண வடிவில் வளைக்கப்படுகின்றது. கோணப் புள்ளிகளில் p, q, r என்னும் எடையுள்ள துகள்கள் வைக்கப்படுகின்றன. ஆயினும், புவி ஈர்ப்பு மையம் மாறவில்லை எனக் காணப்படுகின்றது. p : q : r = 9 : 8 : 7 எனக் காட்டுக.

13. 12 டெசி மீட்டர் நீளமான ஒரு கோலின் ஒரு முனையில், 1 கிலோ கிராம் எடை யொன்று தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றது. மற்றை முனையிலிருந்து 8 கிலோ கிராம் எடையொன்று தொங்கவிடப் பட்டால், அக்கோல் அம்முனையிலிருந்து 3 டெசி மீட்டர் தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றிச் சமநிலை அடையும். அங்கு, 5 கிலோ கிராம் எடை தொங்கவிடப்பட்டால், அம்முனையிலிருந்து 4 டெசி மீட்டர் தூரத்தி லுள்ள ஒரு புள்ளி பற்றிச் சமநிலை யடையும். அக்கோலினது எடையை யும், அதன் புவி ஈர்ப்பு மைய நிலையையும் காண்க.

14. 18 செ. மீ. நீளமுள்ள ஒரு சீர்க் கோலொன்று 8 செ. மீ, 10 செ, மீ. நீளங்களுள்ள இரு பகுதிகளாக வளைக்கப்படுகின்றது. இவ்விரு பகுதிகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணத்தில் அமைந்தால், புதிய வடிவத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்திற்கும், முந்திய புவி ஈர்ப்பு மையத்திற்கு முள்ள தூரத்தைக் காண்க,

15. ABC என்ற முக்கோணத்தினுடைய கோணங்களின் இரு சம வெட்டிகள் BC, CA, AB என்னும் பக்கங்களை முறையே D, E, F என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றன.

DEF என்ற முக்கோணத்தினது புவி ஈர்ப்பு மையம், BC யிலிருந்து என்ன தூரத்தில் இருக்கின்ற தெனக் கணக்கிடுக.

16. ஒவ்வொன்றும் 9 அங்குல நீளமும், 4 அங்குல அகலமும் 3 அங்குல தடிப்பு முள்ள செங்கற்கள், ஒன்றின் மேலொன்றாக வைக்க்

கப்படும் பொழுது, ஒவ்வொரு செங்கல்லும் தனக்குக் கீழுள்ளதைவிட செங்கற்களின் நீளத் திசையில் அரை அங்குலம் நீண்டிருக்கும்படி கிடக்கின்றன. மிகத் தாழ்ந்த செங்கல் ஒரு மேசையின் மீது வைக்கப்பட்டால், எத்தனை செங்கற்கள் விழாதவாறு வைக்கப்படலாம்?

17. ஒரு சீட்டுக்கட்டு ஒரு மேசையின் மீது வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒவ்வொரு சீட்டும் தனக்குக் கீழேயுள்ளதற்கு அப்பால் அக்கூட்டத்தினது நீளத்திசையிலே நீண்டிருக்கின்றது. ஒவ்வொன்றும் இயலத்தக்க அளவிற்கு நீண்டிருந்தால், அத்தொடர்ச்சியாயுள்ள சீட்டுக்களுடைய முனைகளுக்கு இடையே யுள்ள தூரம் ஓரிசை விருத்தியை ஆக்குமெனக் காட்டுக.

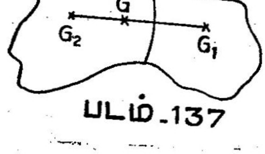
18. ABCD என்னும் ஒரு நாற்கரத் தகடு AC என்னும் ஒரு பொது அடிக்கு எதிர்ப் பக்கங்களில் B, D என்பனவற்றைத் தம் உச்சிகளாகக் கொண்ட ACB, ACD என்னும் இரண்டு இரு சமபக்க முக்கோணங்களினுல் ஆக்கப்பட்டது. கோணம் ABC என்பது ஒரு செங்கோணம். ADC இன் பரப்பு ABC யினது பரப்பை விட நாலு மடங்கிலும் பெரிதல்ல வெனின், அத்தகடு BC என்பது ஒரு கிடைத் தளத்தில் இருக்க ஒரு நிலைக்குத்துத் தளத்திலே ஓய்விலிருக்கு மெனக் காட்டுக.

9. I ஒரு பொருளின் இரு பகுதிகளுடைய புவி ஈர்ப்பு மையங்களானவை தரப்பட்டால், அம்முழுப் பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காணல்

தந்த புவி ஈர்ப்பு மையங்கள் G_1, G_2 என்பன வாகுக. அவ்விரு பகுதிகளுடைய எடைகள் W_1, W_2 என்பன வாகுக, இவ்வதிகாரம், பிரிவு 2 இன்படி வேண்டிய புள்ளி G என்பது G_1, G_2 என்பதை $G_1G : GG_2 = W_2 : W_1$ ஆகும் வண்ணம் பிரிக்கும்

$$\therefore G_1G = \frac{W_2}{W_1+W_2} \cdot G_1G_2$$

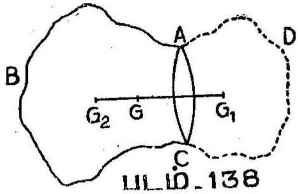
புள்ளி G என்பது, இவ்வதிகாரம் பிரிவு 5 என்பதைத் துணைகொண்டும் பெறலாம்.



படம்-137

II ஒரு பொருளினுடைய முழுவதன் புவிஈர்ப்பு மையமும், அதன் ஒரு பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையமும் தந்தால், மீதிப் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காணல்.

G என்பது ABCD என்னும் ஒரு பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையமாகுக. G_1 என்பது ACD என்னும் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மைய மாகுக W என்பது அம் முழுப் பொருளின் எடையாகவும், W_1 என்பது ACD என்பதனுடைய எடையாகவு மாகுக.



படம்-138

ஆயின், $W_2 = W - W_1$ என்பது ABC என்னும் பகுதியினது எடையாகும்.

G_2 என்பது ABC என்னும் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மைய மாகுக.

அப்பொருளினுடைய இரு பகுதிகளும் சேர்ந்து அம் முழுப் பொருளை உண்டாக்குவதால்,

G_1 இல் உள்ள W_1 என்ற எடைக்கும், G_2 இல் உள்ள W_2 என்ற எடைக்கும் புவி ஈர்ப்பு மையம் G யில் இருக்கவேண்டும்.

எனின், G என்பது

$$W_2\ G_2G = W_1 . GG_1 \text{ என்றுகும்.}$$

வண்ணம் $G_1\ G_2$ இன் மீது கிடத்தல் வேண்டும்.

$$\text{எனின், } GG_2 = \frac{W_1.GG_1}{W_2}$$

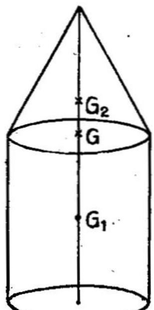
$$= \frac{W_1\ GG_1}{W - W_1}$$

G_2 என்பதை இவ்வதிகாரம், பிரிவு 5 ஆலும் பெறக்கூடும்.

10. உதாரணம் 1

ஓருருளைக்கும், ஒரு கூம்பிற்கும் ஒரே அளவுகொண்ட அடிகள் உள. அவ்வடிகள் ஒருமித்து இணைக்கப்பட்டால், அவற்றின் பொதுப் புவி ஈர்ப்பு மையம் பொது அடியின் மையத்தில் இருக்குமாறு அவ்வுருளையின் உயரத்திற்கு, அக்கூம்பின் உயரத்தின் விகிதத்தைக் காண்க.

உருளையின் உயரத்தை h என்றும், கூம்பின் உயரத்தை h′ என்றும் அவற்றின் பொது அடியின் பரப்பை A என்றும் குறிப்போம்.



படம்.139

உருளையின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G_1 என்றும், கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G_2 என்றும் அவற்றின் பொதுப் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G என்றும் குறிப்போம்.

உருளையின் கன அளவு$=hA$

கூம்பின் கன அளவு$=\frac{1}{3}h'A$

$\therefore$ கன அளவுகளின் விகிதம்$=hA : \frac{1}{3}h'A$
$=3h : h'$

ஒருமித்து இணைக்கப்பட்ட பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையம், பொது அடியின் மையத்திலிருப்பதால், நாம் பெறுவது

$G_1G : GG_2 = G_2$ இல் உள்ள எடை : G_1 உள்ள எடை

(அ-து) $\frac{h}{2} : \frac{h'}{4} = h' : 3h$

$\therefore \frac{3h^2}{2} = \frac{h'^2}{4}$

$\therefore 6h^2 = h'^2$

$\therefore h' = \sqrt{6}\,h$

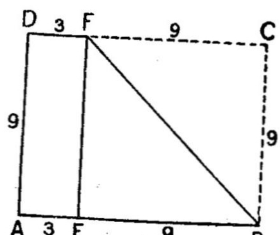
$\therefore h' : h = \sqrt{6} : 1$

உதாரணம் 2

செவ்வக வடிவில் உள்ள தாள் ஒன்றின் நீளம் 12 செ. மீ; அகலம் 9 செ. மீ; அதன் குறுகிய பக்கங்களுள் ஒன்று மடிக்கப்பட்டு, அது நீளப் பக்கங்களுள் ஒன்றுடன் முற்றிலும் பொருந்துமாறு கீழ்க் கொண்டு வரப்படுகிறது. அப்படி மடிக்கப்பட்ட முழுத் தாளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

AEBFD என்பது மடிக்கப்பட்ட தாளைக் குறிக்கட்டும். இதில், முக்கோணப்பகுதி EFB என்பது இரட்டிப் பாக இருக்கும்.

AB, AD என்பவற்றை ஆயங்களாகக் கொள்வோம்.



படம்.140

AE FD என்னும் பகுதியின் எடை 27 க்கு விகிதசமமாகவும், EFB என்பதின் எடை 81 க்கு விகிதசமமாகவும் இருக்கும்.

எடைகளையும், ஆயங்களிலிருந்து புவி ஈர்ப்பு மையங்களின் தூரங்களையும் அட்டவணைப்படுத்த, நாம் பெறுவது

எடை.		AD யிலிருந்து புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம்	AB யிலிருந்து புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம்
AEFD	27	$\frac{3}{2}$ செ. மீ.	$\frac{9}{2}$ செ. மீ.
EFB	81	$3+\frac{1}{3}\times 9$ $=6$ செ. மீ.	$\frac{1}{3}\times 9$ $=3$ செ. மீ.
முழு உருவம்	108	x	y

AD பற்றித் திருப்புத் திறன் காண, நாம் பெறுவது

$$108\ x=81\times 6+27\times \frac{3}{2}$$

$$=486+\frac{81}{2}=\frac{1053}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{1053}{216}=4\frac{7}{8}\text{ செ. மீ.}$$

AB பற்றித் திருப்புத் திறன் காண, நாம் பெறுவது

$$108\ y=81\times 3+27\times \frac{9}{2}$$

$$=243+\frac{243}{2}=\frac{729}{2}$$

$$\therefore\ y=\frac{729}{216}=3\frac{3}{8}\text{ செ. மீ.}$$

உதாரணம் 3

ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத் தகட்டிலிருந்து, அதனடி BC க்கு ஒரு சமாந்தரக் கோடு வரைதலால், அதன் பரப்பின் காற்பங்கு வெட்டப்படுகிறது. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

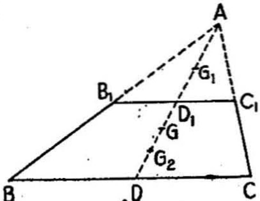
AB_1C_1 என்பது வெட்டப்பட்ட பகுதியாகுக.

ஆயின், $\triangle AB_1C_1 : \triangle ABC=1:4$

முக்கோணங்கள் AB_1C_1, ABC என்பன வடிவொத்தவை யாதலால்,

$$\triangle AB_1C_1 : \triangle ABC = AB_1{}^2 : AB^2$$

$$\therefore AB_1{}^2 : AB^2 = 1 : 4$$



படம் - 141

எனின், $AB_1 = \frac{1}{2} AB$

ஆகவே, $B_1 C_1$ என்னும் கோடு AB, AC, AD என்பனவற்றை இரு சமக்கூறிடும். G, G_1 என்பன முறையே முக்கோணங்கள் ABC, AB_1C_1 என்பனவற்றினுடைய புவி ஈர்ப்பு மையங்களாகுக.

எஞ்சிய பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் G_2 ஆகுக. W_1, W_2 என்பன முறையே வெட்டிய பகுதி, மீதிப் பகுதி என்னும் இவற்றினுடைய எடைகளாகுக.

ஆயின், $W_2 = 3W_1$

G_2 இல் உள்ள W_2 என்பதும், G_1 இல் உள்ள W_1 என்ற எடையும் G பற்றிச் சமமாக்கப்படுகின்றமையால், பிரிவு 5 இன்படி, நாம் பெறுவது $DG = \dfrac{W_2 . DG_2 + W_1 DG_1}{W_2 + W_1} = \dfrac{3\,DG_2 + DG_1}{4}$

$$\text{ஆனால், } DG = \tfrac{1}{3} DA = \tfrac{2}{3} DD_1$$

$$DG^1 = DD_1 + D_1 G_1 = DD_1 + \tfrac{1}{3} D_1 A$$

$$= DD_1 + \tfrac{1}{3} DD_1 = \tfrac{4}{3} DD_1$$

$$\text{ஆகவே, } 4 \times \tfrac{2}{3} DD_1 = 3DG_2 + \tfrac{4}{3} DD_1$$

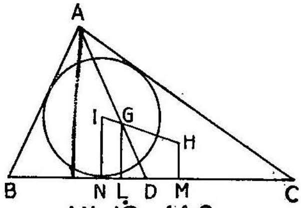
$$\therefore DG_2 = \tfrac{4}{9} DD_1$$

உதாரணம் 4

ஒரு சீர் முக்கோணப் பலகை ஒன்றிலிருந்து உள் வட்டப் பகுதியின் பரப்புப் பகுதி நீக்கப்படுகின்றது. S என்பது அப்பலகையின் பரப்பாயும், s என்பது அதன் அரைச் சுற்றளவாயு மிருந்தால், யாதேனுமொரு பக்கம் a இல் இருந்து மீதிப்பாகத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம்

$$\frac{S \quad 2s^3 - 3\pi aS}{3a\ s \quad s^2 - \pi S}$$ எனக் காட்டுக.

ABC என்பது முக்கோணப்பலகை ஆகுக,



படம் - 142

G என்பது அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தையும், I என்பது உள் வட்டத்தின் மையத்தையும், H என்பது உள் வட்டப் பகுதி நீக்கிய பின் உள்ள பாகத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தையும் குறிக்க.

IN, GL, HM என்பவற்றை BC க்குச் செங்குத்தாக வரை.

இங்கு IN=r(உள் வட்ட ஆரை) ஆகும். A யிலிருந்து BC க்கு வரையும் செங்குத்துயரம் p ஆனால்,

$$GL=\frac{1}{3}p=\frac{1}{3}\cdot\frac{2S}{a}$$

உள் வட்டப் பகுதியின் எடை, அது நீக்கியபின் உள்ள பாகத்தின் எடை, முழு முக்கோணப் பலகையின் எடை என்பன முறையே πr^2, $S-\pi r^2$, S என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருக்கவேண்டும்.

நீக்கப்படும் பகுதியும், எஞ்சிய பகுதியும் சேர்ந்து முழுப் பொருளை ஆக்குகின்றமையால்,

I இல் உள்ள எடைக்கும், H இல் உள்ள எடைக்கும் புவி யீர்ப்பு மையம் G யில் இருக்கவேண்டும். இவற்றிற்கு, BC பற்றித் திருப்புத் திறன் காண நாம் பெறுவது

$$GL.S=IN.\pi r^2+HM(S-\pi r^2)$$

$$\therefore\ \frac{2S^2}{3a}=\pi r\ +HM(S-\pi r^2)$$

இதில், $r=\frac{S}{s}$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

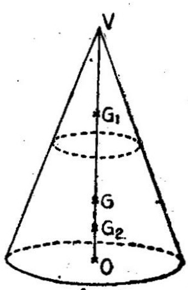
$$HM=\left[\frac{2S^2}{3a}-\pi\left(\frac{S}{s}\right)^2\right]\div\left[S-\pi\left(\frac{S}{s}\right)^2\right]$$

$$=\frac{S}{3as}\cdot\frac{2s^3-3\pi aS}{s^2-\pi S}$$

உதாரணம் 5

ஓர் இலேசான உலோகத் தகட்டால் செய்யப்பட்ட ஒரு குழிக் கூம்பு பாத்திரம் அடியில் மூடப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரம், சாய்வு உயரம், அடியின் ஆரை முறையே h, l, r ஆகும். அக்குழிக் கூம்பு அதன் செங்குத் துயரத்தில் பாதியில், அதன் அடிக்கு இணையான ஒரு தளத்தினால் குறுக்காக வெட்டப்பட்டு மேல் கூம்பு நீக்கப்படுகிறது. எஞ்சிய பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அடியிலிருந்து

$\frac{2lh}{3(3l+4r)}$ என்னும் தூரத்திலுள்ளது எனக் காட்டுக.



படம் - 143

குழிக் கூம்பின் உச்சியை V என்றும், அதன் அடியின் மையத்தை O என்றும் குறிப்போம்.

அக்குழிக் கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G என்றும், நீக்கப்பட்ட கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G_1 என்றும், அடியுடன் கூடிய எஞ்சிய கூம்பின் பாகத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G_2 எனவுங் குறிப்பிடுவோம். அடியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் O ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட கூம்பு, அதன் அடி, நீக்கப் பட்ட கூம்பு, அடியுடன் கூடிய எஞ்சிய பாகத்தின் எடைகள் முறையே

$$\pi r l,\ \pi r^2,\ \pi\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right);\left(\pi - \frac{\pi r l}{4} + \pi r^2\right)$$

வற்றிற்கு விகிதசமமாகும்.

(அ-து) $\pi rl,\ \pi r^2,\ \frac{\pi rl}{4},\ \frac{3\pi rl}{4} + \pi r^2$ என்பனவற்றிற்கு விகித சமமாகும்.

இப்பொழுது, $OG = \frac{h}{3}$; $OG_1 = \frac{h}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{2h}{3}$

O பற்றிக் கொடுக்கப்பட்டக் கூம்பு, அதன் அடி என்பனவற்றின் திருப்புத் திறன்களின் கூட்டுத் தொகையை, நீக்கப்பட்ட கூம்பு, எஞ்சிய பாகம் என்பனவற்றின் திருப்புத் திறன்களுக்குச் சமப்படுத்த நாம் பெறுவது

$$\pi rl \times OG + \pi r^2 \times o = \frac{\pi rl}{4} \times OG_1 + \left(\frac{3\pi rl}{4} + \pi r^2\right) OG_2$$

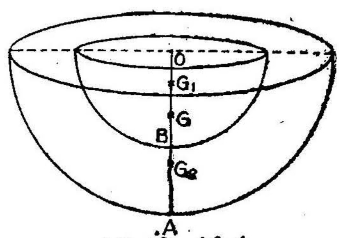
$$(\text{அ-து})\,\pi r l\, \frac{h}{3} = \frac{\pi r l}{4} \times \frac{2h}{3} + \left(\frac{3\pi rl}{4} + \pi r^2\right) OG_2$$

$$\therefore \frac{(3\pi rl + 4\pi r^2)}{4} OG_2 = \frac{\pi rlh}{6}$$

$$\therefore OG_2 = \frac{4\pi rlh}{6\pi r(3l+4r)} = \frac{2lh}{3(3l+4r)}$$

உதாரணம் 6

ஒரு சீரான குழிக் கிண்ணம் a, b என்பனவற்றை ஆரைகளாக வுடைய ஒரு மைய அரைக் கோளங்களைத் தனது உட்புற, வெளிப்புறப் பரப்புகளாகக் கொண்டுள்ளது. அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் அதன் வடிவ கணித மையத்திலிருந்து $\frac{3(a+b)(a^2+b^2)}{8(a^2+ab+b^2)}$ என்னும் தூரத்தில் உள்ளது எனக் காண்பி.



படம் - 144

O என்பது அரைக் கோளங்களின் பொது மைய மாகட்டும். ஆரை a ஆக உள்ள அரைக் கோளத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G என்றும், b ஆரை உடைய அரைக் கோளத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G_1 என்றும் குறிப்போம். முந்திய அரைக் கோளத்திலிருந்து பின்னதை நீக்க, எஞ்சியுள்ள குழிக் கிண்ணத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை G_2 எனக் குறிப்போம்.

இங்கு O, G_1, G, G_2 ஒரே நேர் கோட்டிலிருக்கும்.

இப்பொழுது, $OG = \frac{3}{8}a$; $OG_1 = \frac{3}{8}b$ (இவ்வதிகாரம், பிரிவு 11—பாகம் III உதாரணம் 1) (பக்கம் பார்க்கவும்)

G, G_1, G_2 என்பனவற்றிலுள்ள எடைகள் முறையே

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi a^3, \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi b^3, \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi b^3\right)$$

என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருக்கும்.

(அ-து) a^3, b^3, (a^3-b^3) என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருக்கும்.

இரு பகுதிகளும் சேர்ந்து முழுப் பொருளை ஆக்குகின்றமையால், G_1 இல் உள்ள எடைக்கும், G_2 இல் உள்ள எடைக்கும், புவி ஈர்ப்பு மையம் G யில் இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, O பற்றித் திருப்புத் திறன்கள் காண, நாம் பெறுவது

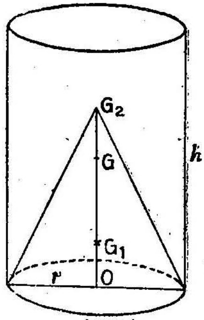
$$a^3 . \frac{3}{8} a = b^3 . \frac{3}{8} b + (a^3 - b^3) . OG_2$$

$$\therefore OG_2 = \frac{3}{8} \frac{(a^4 - b^4)}{a^3 - b^3}$$

$$= \frac{3}{8} \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{a^2+ab+b^2}$$

உதாரணம் 7

ஒரு சீருருளை யொன்றிலிருந்து தன்னடி, உருளையினடியோடு பொருந்தும் ஒரு கூம்பை எவ்வாறு வெட்டினால், மீதித் திண்மத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அக்கூம்பின் உச்சியோடு பொருந்தும்?



படம் - 145

அடியின் மையத்தை O என்றும், அதன் ஆரையை r என்றும், உருளையின் உயரத்தை h என்றும் குறிப்போம். G, G_1, G_2 என்பன முறையே உருளை, வெட்டப்பட்டக் கூம்பு, மீதித் திண்மம் என்பனவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையங்களாகுக.

$OG_2 = x$ என்க,

$\therefore OG_1 = x/4$

உருளை, வெட்டி எடுக்கப்பட்ட கூம்பு, எஞ்சிய பாகம் என்பனவற்றின் எடைகள் முறையே $\pi r^2 h, \frac{1}{3}\pi r^2 x, (\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 x)$ என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருக்கும்,

(அ-து) h, $\frac{1}{3}$ x, h$-\frac{1}{3}$ x என்பனவற்றிற்கு விகிதசமமாக இருக்கும். அப்பொருளினுடைய இரு பகுதிகளும் சேர்ந்து அம் முழுப்பொருளை ஆக்குகின்றமையால், G_1 இல் உள்ள எடைக்கும், G_2 இல் உள்ள எடைக்கும் புவி ஈர்ப்பு மையம் Gஇல் இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே, O பற்றித் திருப்புத் திறன்கள் எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$h.\frac{h}{2}=\frac{1}{3}\ x.\frac{x}{4}+\left(h-\frac{1}{3}\ x\right)x$$

(அ-து) $\frac{h^2}{2}=\frac{x^2}{12}+hx-\frac{1}{3}x^2$

(அ-து) $x^2-4\ hx+2h^2=O$

$\therefore x=(2\pm\sqrt{2})\ h$

இங்கு, $x=(2+\sqrt{2})$ h என்ற விடை பொருந்தாது;

ஏனெனில், $x > 2$ h ஆகும்.

$\therefore x=(2-\sqrt{2})\ h$

$\therefore x : h=(2-\sqrt{2}) : I$

பயிற்சி 10·3

1. 6 செ. மீ. 8செ. மீ.என்னும் நீளங்களையும், முறையே 2 செ. மீ; $2\frac{1}{2}$ செ. மீ என்னும் அகலங்களையுமுடைய ஒரே அட்டைப் பலகையின் இரு செவ்வகத் துண்டுகளுள்ளே, நீண்ட துண்டு நிலைக்குத்தாயிருக்க, அவை யிரண்டும் T வடிவான உருவத்தை ஆக்குமாறு (ஒன்றன் மேலொன்று படியாமல்) ஒன்றையொன்று தொட்டுக்கொண்டு இருக்கும் படி ஒரு மேசையின் மீது வைக்கப்படுகின்றன. அவ்வுருவத்தின் புவி ஈர்ப்பு மைய நிலையைக் காண்க.

2. ஒரு துண்டு அட்டைப் பலகை BC என்னும் பக்கத்தின் மீது வரையப்பட்ட இரு சமபக்க முக்கோண மொன்றோடு கூடிய ABCD என்னும் ஒரு சதுரத்தின் வடிவைக் கொண்டிருக்கிறது. அச்சதுரத்தின் பக்கம் 12 செ. மீ; அம்முக்கோணத்தின் உயரம் 6 செ. மீ; எனில், AD என்னும் பக்கத்திலிருந்து அப்பலகையின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க.

3. இரு சமபக்கச் செங்கோண முக்கோண மொன்றினுடைய பக்கங்கள் எல்லாவற்றின் மீதும் வெளிப் பக்கமாகச் சதுரங்கள்

வரையப்பட்டிருக்கின்றன. அவ்வாறு அமைந்த உருவத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம், செம்பக்கத்தை இரு சமக்கூறிடும் கோட்டிலிருக்கு மென்றும், அது அக்கோட்டை 1 : 26 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கு மென்றும் காட்டுக.

4. ஒரு திண்ம நேர் வட்ட உருளை, அதனடிக்குச் சமமான அடியுடைய ஒரு திண்ம அரைக் கோளத்துடன், அவ்வடிகள் ஒருமித்து இருக்கும் வண்ணம் இணைக்கப்படுகின்றது. அவற்றின் பொதுப் புவி ஈர்ப்பு மையம் பொது அடியின் மையத்தில் இருக்குமாறு அவ்வுருளையின் உயரத்திற்கு, அவ்வடியின் ஆரையின் விகிதத்தைக் காண்க.

5. ஒரு கூம்பினது தளவடியோடு கூடிய முழு மேல் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் கன அளவின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தோடு பொருந்துமாறு அக் கூம்பின் உச்சிக் கோணத்தைக் காண்க.

6. ஒரே பொருளாகிய இரு நேர் கூம்புகளுக்குச் சமமான சாய் பக்கங்களும், முறையே $60°, 120°$ என்னும் உச்சிக் கோணங்களும் உண்டு. அவை, ஒரு சாய்பக்கம் பொருந்தும்படியாக இணைக்கப்பட்டுள்ளன. அவை பொது வுச்சியிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டால், தொடு கோடு நிலைக்குத்திற்கு $15°$யிற் சாய்ந்திருக்கு மெனக் காட்டுக.

7. ஒரு முக்கோண வடிவுள்ள காகிதத் துண்டும் முக்கோணத்தின் இரு பக்கங்களை இரு சமக்கூறிடும் கோடு பற்றி மடிக்க, அதனுச்சி அதனடிமீது கிடக்கும்படி கொண்டுவரப்படுகிறது. அம்முக்கோண அடியிலிருந்து இந்நிலையிலுள்ள தாளின் சடத்துவ மையத் தூரம் (Centre of inertia) அதே கோட்டிலிருந்து மடிக்கப்படாத தாளின் சடத்துவ மையத் தூரத்தின் முக்காற் பங்கெனக் காட்டுக.

8. m, n, p,.........என்னும் யாதேனு மொரு தொகை, எடைகள் A, B, C, ... என்னும் புள்ளிகளில் இருக்க, G என்பது அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையமாயும், P என்பது யாதேனு மொரு புள்ளியாயு மிருந்தால், $m\,AP^2+n.\,BP^2+p.\,CP^2+\dots\dots\dots$

$$=m.\,AG^2+n.\,BG^2+p.\,CG^2+\dots\dots\dots+(m+n+p+\dots)PG^2$$

எனக் காட்டுக.

9. 40, 30 என்னும் செ. மீ. நீளங்களையும், முறையே 20, 10 என்னும் செ. மீ. விட்டங்களையும் கொண்டு, ஒரே பொருளால் செய்யப்பட்ட இரு உருளைகள், அவற்றிற்குப் பொதுவான ஒரு அச்சு இருக்கும் வண்ணம் இணைக்கப்படுகின்றன. அவ்விணைப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

10. ஓரிணைகரத்திலிருந்து அதனுடைய மூலை விட்டங்களால் பிரிக்கப்படும் நான்கு பகுதிகளுள் ஒன்று வெட்டப்படுகின்றது. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

11. ஓரிணைகரமானது எதிர்ப்பக்க மையங்களைச் சேர்ப்பதாலே நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு அவற்றுள் ஒரு பகுதி விலக்கப்படுகின்றது. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

12. ஒரு சதுரத்திலிருந்து, அதனுடைய இரண்டு அடுத்துள்ள பக்கங்களின் மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டினது நீளத்திற்கு வெட்டுதலால் ஒரு முக்கோணப் பகுதி விலக்கப்படுகின்றது. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

13. ஒரு முக்கோணத்திலிருந்து அதனடிக்குச் சமாந்தரமான ஒரு நேர்கோட்டினாலே அதன் பரப்பில் $\frac{1}{9}$ பங்கு விலக்கப்படுகின்றது. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

14. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணத்திலிருந்து, மூன்று சம முக்கோணங்கள் ARQ, BPR, CQP என்பன நீக்கப்படுகின்றன, ABC, PQR என்னும் முக்கோணங்களுடைய சடத்துவ மையங்கள் ஒன்றோடொன்று பொருந்து மெனக் காட்டுக.

15. ABC என்ற முக்கோணத்திலிருந்து B, C என்பனவற்றில் இவ்விரண்டு கோணப் புள்ளிகளுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களுக்குச் சமாந்தரமாய் வரையும் கோடுகளால் ஒவ்வொன்றும் முழு முக்கோணத்தில் $\frac{1}{m}$ பங்குள்ள இரு முக்கோணங்களானவை நீக்கப்படுகின்றன. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

16. ஒரு சதுரத் தகட்டிலிருந்து அதனுடைய பக்கங்களுள் ஒன்றைத் தன் அடியாகக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தை எவ்வாறு வெட்டினால், மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் இம் முக்கோணத்தின் உச்சியாகும் எனக் காண்க.

17. ஒரே அடி BCயில் ABC, A′BC என்னுமிரு முக்கோணங்கள் உள, A′ என்பது முந்திய முக்கோணத்திற்குள்ளே கிடக்கின்றது. A′ என்பது அவ்விரு முக்கோணங்களுக்கு மிடையே கிடக்கும் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையமாயின், அதனுடைய நிலையைக் காண்க.

18. ஒரு சதுரத்துவாரம், ஒரு வட்டத் தகட்டிலிருந்து அச்சதுரத்தின் மூலை விட்டம் அவ்வட்ட ஆரை யாகும்படி துளைக்கப்படுகின்றது. a என்பது அவ்வட்டத்தின் விட்டமாயின், மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அவ்வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{a}{8\pi-4}$ என்னும் தூரத்திலிருக்குமெனக் காட்டுக.

சதுரத்தின் மூலை விட்டம் பின் புறமாக நீட்டப்பட்டு, அதிலிருந்து 30° கோணத் தூரத்தில் தகட்டின் விளிம்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வட்டத் தகடு தொங்கவிடப்பட்டால், மூலை விட்டம் நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

19. n பக்கங்களுடைய ஒழுங்கான பல் கோணத்தினுடைய கோணங்களுள் (n—1) இலே ஒன்றுக்கொன்றுகச் சமதுகள்கள் வைக்கப்படுகின்றன. அப்பல் கேணத்தின் சுற்று வட்ட ஆரை a எனின், சுற்று வட்ட மையத்திலிருந்து அத் துகள்களின் புவி ஈர்ப்பு மையத் தூரம் $\frac{a}{n-1}$ எனக் காட்டுக

20. 5a நீளமான ஒரு சீர்க் கோலொன்று, ஒழுங்கான அறுகோணத்தின் ஐந்து பக்கங்களாகும்படி வளைக்கப்படுகின்றது. அக் கோலின் எம்முனையிலிருந்தும் அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம் $\frac{a}{10}\sqrt{133}$ எனக் காட்டுக.

21. a, b என்னும் ஆரைகளையுடைய இரு கோளங்கள் ஒன்றையொன்று உள்ளாலே தொடுகின்றன. அவற்றிடையே அமைந்துள்ள கனப் பொருளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

22. ஒரு கன நேர் வட்டக் கூம்பின் அடி தோண்டப்பட, அதனால் ஏற்படும் குழி அதே அடியில் உள்ள ஒரு நேர் கூம்பாகின்றது. எவ்வளவு தோண்டப்பட்டால், மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அக்குழியின் உச்சியோடு பொருந்தும்?

23. நேர் வட்டக் கூம்பு வடிவான ஒரு திண்மத்தின் அடி குடையப்பட, அதனுலே உண்டாக்கப்படும் குழி அதே அடியையும், முந்திய கூம்பின் அரைப் பங்கு உயரத்தைக்கொண்ட ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பாகின்றது. அவ்வாறு ஆக்கப்படும் கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது நிலையைக் காண்க.

24. ஒரு நேர் கூம்பானது தன் அச்சைச் செங்கோணத்தில் இரு சமக்கூறிடும் ஒரு தளத்தால் வெட்டப்பட்டால், அக்கூம்பின் உச்சியிலிருந்து அவ்வெட்டப்பட்ட அடித் துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க.

25. ஒரு கூம்பின் அடிவெட்டினது முகங்களின் ஆரைகள் 2 அடி, 3 அடி ஆகும். அதன் தடிப்பு 4 அடி எனில், அதன் பெரிய முகத்திலிருந்து புவி ஈர்ப்பு மையத்தினது தூரத்தைக் காண்க

26. ஒரு கன நேர் வட்டக் கூம்பின் அடி வெட்டினது தள முனைகளின் ஆரைகள் a, b ஆகும். அடி வெட்டின் தடிப்பு h எனில், அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

27. ஒரு கூம்பின் அடியின் விட்டம் அதனுயரத்திற்கு $1:\sqrt{2}$ என்னும் விகிதத்தில் இருந்தால், அதிலிருந்து கூடிய அளவு மிகப் பெரிய கோளம் வெட்டப்படும் பொழுது, மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அக்கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தோடு பொருந்து மெனக் காட்டுக.

28. தன்னுச்சிக் கோணம் 60° ஆகவுள்ள ஒரு சீர் நேர் கூம்பொன்றிலிருந்து கூடிய அளவு மிகப் பெரிய கோளம் வெட்டப்படுகின்றது. மீதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அச்சை என்ன விகிதத்தில் பிரிக்கு மெனக் காண்க.

29. ஒரு கனக் கூம்பிற்கும், ஒரு அரைக் கோளத்திற்கும் ஒரே அளவு கொண்ட அடிகள் உள. அவ்வடிகள் ஒருமித்து இணைக்கப்பட்டால், அவற்றின் பொதுப் புவி ஈர்ப்பு மையம், பொது அடியின் மையத்தில் இருக்குமாறு, அக்கூம்பின் உயரத்திற்கு அப்பொது அடியின் ஆரையின் விகிதத்தைக் காண்க.

30. ஒரு சீர் வட்டத் தட்டொன்றிலிருந்து கொடுக்கப்பட்ட அளவுள்ள ஒரு வட்டத் துவாரம் துளைக்கப்படுகின்றது. புவி ஈர்ப்பு மையம் ஒரு குறித்த வட்டத்திற்குள் கிடக்கு மெனக் காட்டுக.

11. தொகை நுண் கணித முறையில் புவி ஈர்ப்பு மையங்களைக் (Centres of Gravity by Integration) காணல்

இவ்வதிகாரம், பிரிவு 5 இல் உள்ள சூத்திரங்கள் எடைகளுக்கேயன்றி, யாதேனு மொரு சமாந்தர விசைத் தொகுதிக்கும் பொருந்தும். இது, அதிகாரம் 4, பிரிவு 4இல் உள்ள சூத்திரங்களினுல் தெளிவாகும்.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$...என்ற எடைகள் முறையே (x_1, y_1); (x_2, y_2) (x_3, y_3)...என்ற புள்ளிகளில் செயல்பட்டால், அவற்றின் விளைவு செயல் படும் புள்ளி புவிஈர்ப்பு மையம் என்றும், அதன் ஆயத் தொலைகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனில், $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பனவற்றைக் காணப் பயன்படும் சூத்திரங்கள்

$$\bar{x} = \frac{\sum \omega_r x_r}{\sum \omega_r}, \bar{y} = \frac{\sum \omega_r y_r}{\sum \omega_r} \quad (1)$$ என்றும் பார்த்தோம்.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$...என்ற எடைகளின் நிறைகள் (masses) முறையே m_1, m_2, m_3...எனின், $\omega_1 = m_1 g$; $\omega_2 = m_2 g$ என்பதால்,

$$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r}, \bar{y} = \frac{\sum m_r y_r}{\sum m_r} \quad (2)$$ எனப் பெறுகின்றோம்.

ஆகவே, விறைப்பாக இணைக்கப்பட்ட ஒரு பொருண்மைத் தொகுதியில் உள்ள m_1, m_2, m_3 ... என்ற பொருண்மைகள் (masses) முறையே (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) என்னும் புள்ளிகளில் இருந்தால் அவற்றின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தை,

$$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_n}{\sum m_r} \quad \bar{y} = \frac{\sum m_r y_r}{\sum m_r}$$ என்னும் சமன்பாடுகளில் இருந்து பெறக்கூடும்.

குறிப்பு

துகள்களின் எடைகளுக்குப் (weights) பதிலாக அவற்றின் நிறைகளைக் (masses) கருதி, (2) ஆம் சமன்பாடுகளிலிருந்து நாம் பெறும் புள்ளியைப் **பொருண்மை மையம்**, அல்லது **நிறை மையம்** (Centre of masses) எனக் குறிப்பிடுவது வழக்கம்

புவி ஈர்ப்பு மையம் என்ற சொல், துகள்களின் எடைகளுடைய இணை விசைகளின் விளைவின் செயல்படும் புள்ளியைக் குறிக்கின்றது. ஒரு துகளின் எடை என்பது அத் துகள் பூமியினால் ஈர்க்கப்படும் கவர்ச்சி விசையாகும். இக்கவர்ச்சி விசை அத்துகளி நிறைக்கு விகித சமமாக இருந்து, புவி மையத்தை நோக்கிச் செயல்படுகிறது. புவியுடன் ஒப்பிடும்போது, சிறியதாய் உள்ள பொருள்களின் துகள்கள் எல்லாம் புவியின் மையத்திலிருந்து நெடுந் தொலைவில் இருப்பதால், அவற்றின் ஈர்ப்பு விசைகள் இணை விசைகளாகக் கொள்ளலாம். இப்படிக் கொள்ளும்போது, புவி ஈர்ப்பு மையமும், பொருண்மை மையமும் ஒரே புள்ளியாகும்.

ஆயினும், பூமியின் மீதுள்ள பொருள் மிகப் பெரியதாயின், அதன் துகள்களின் ஈர்ப்பு விசைகள் இணை விசைகள் ஆகா. இந்நிலையில் புவி ஈர்ப்பு மையம் என்னும் ஒரு புள்ளி இருக்கவேண்டிய தேவையில்லை.

மேலும், நிலக் கவர்ச்சி இல்லாத இடத்திற்கு அப்பொருளை எடுத்துச் சென்றால் அப்பொருளுக்கு எடை இராது. இந்நிலையில் புவி ஈர்ப்பு மையம் என்பதே கருத முடியாத ஒன்றாகும். ஆயினும், பொருளின் நிறை என்பது அதன் உள்ளியல்பைப் பொருந்தியதால், அது புவிக் கவர்ச்சியைச் சார்ந்ததல்ல. ஆகவே, அப்பொருளுக்கு பொருண்மை மையம் என்ற ஒன்று எப்பொழுதுமே உண்டு.

எந்த உருவமுடைய பொருளுக்கும், புவி ஈர்ப்பு மையம் உண்டெனின், அத்துடன் அதன் பொருண்மை மையமும் பொருந்தும்.

இவ்வாறாக, ஒரு பொருளுக்குப் புவி ஈர்ப்பு மையம் இருந்தால், அப்புள்ளியே அதற்குப் பொருண்மை மையமாகும். ஆனால், ஒரு பொருளுக்கு பொருண்மை மையம் உண்டெனின், அதற்கு, புவி ஈர்ப்பு மையம் இருப்பினும் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்.

ஆனால், அவை தனித்தனிப் பொருண்மைகளாக அல்லாமல், ஒரு தகடு அல்லது கட்டிறுக்கப் பொருள் என்பது போன்றவையில் உள்ளது போல் தொடர்ச்சியான பொருள் தொகுதியாக இருக்குமானால், மேற்கூறிய சூத்திரங்களில் உள்ள $\sum$ எனனும் கூட்டற் குறி $\int$ ஆன வரையறுத்த தொகைக் குறியாகக் கொள்ளப்படும்.

$m_1, m_2, \ldots m_n$ என்பதற்குப் பதிலாக, ஒரு நுண்பகுதிப் பொருண்மை δm எனக் கொள்வோம்.

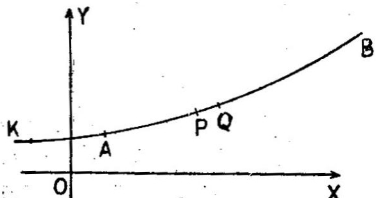
இது (x, y) என்ற இடத்தில் இருக்கட்டும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r} = \frac{\sum \delta m . x}{\sum \delta m} = \frac{\int x \, dm}{\int dm}$$ (குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள்)

இதேபோல், $$\bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int dm}$$ (குறிப்பிட்ட எல்லைக்குள்)

12. இனி, சில குறிப்பிட்ட பொருள்களின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணும் முறையை விளக்குவோம்.

I ஒரு வில்லின் புவி ஈர்ப்பு மையம்



படம்-146

AB என்பது $y=f(x)$ என்னும் வளைவரையின் (curve) வில் எனக் கொள்வோம். அவ்வளைவரையில் உள்ள K என்னும் ஏதேனுமொரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து விற்களின் நீளங்களை அளப்போம். வில் $KA=s_1$; வில் $KB=s_2$ என்க.

$P(x, y)$ என்பது அவ்வில்லின் மீதுள்ள யாதேனுமொரு புள்ளி யாகட்டும், $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பது P யிற்கு அடுத்துள்ள புள்ளி யாகட்டும்.

PQ என்பது அவ்வில்லின் நுண் பகுதியாகும். ஆகவே, வில் $KP=s$ எனில், வில் $KQ=s+\delta s$ எனக் கொள்ளலாம்.

∴ PQ என்ற வில்லின் நீளம் δs ஆகும். இப்பொழுது, ஒரு அலகு நீளமுள்ள வில்லின் நிறை ρ எனக் கொள்வோம்.

எனவே, நுண் பகுதி PQ வின் நிறை $=\rho.\delta s$; இந்த நுண் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் ρ (x, y) யில் இருப்பதாகக் கொள்ளலாம். ஆகவே, வில் AB புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் ஆயத் தொலைகளைக் கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளிலிருந்து நாம் பெறலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{s=s_1}^{s=s_2} \rho.\delta s.x}{\sum\limits_{s=s_1}^{s=s_2} \rho.\delta s}$$

$$= \frac{\int_{s_1}^{s_2} x\,ds}{\int_{s_1}^{s_2} ds} \qquad (1)$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{s_1}^{s_2} y\,ds}{\int_{s^1}^{s_2} ds} \qquad (2)$$

குறிப்பு

இங்கு ρ என்பது **செறிவைக்** (density) குறிக்கும். சமச் செறிவுடைய பொருள்களானால், ρ ஒரு மாறிலியாகும். $\int$ குறிக்குள் ρ வந்தால், அதைக் குறிக்கு வெளியே கொண்டுவந்து ஒரு மாறிலியாகக் கொள்ளலாம்.

ஆனால், சில பொருள்களில் செறிவு ஒன்றுக இருப்பதில்லை. அது புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறலாம். இந்நிலையில், அது அப்புள்ளியின் (x, y) ஆயத் தொலைகளைப் பொறுத்திருக்கும். இங்கு ρ மாறிலியாகாது. ஆகவே, $\int$ குறிக்குள் ρ வருமானல், அதைக் அக் குறிக்குள்ளேயே கொண்டு விடை காண வேண்டும்.

குறிப்பு 2

மேலுள்ள தொகைகளை மதிப்பிட, தெக்கார்ட்டின் கூறுகளைப் (Cartesian co-ordinates) பயன்படுத்தினுல்,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\; dx$$ என்னும் சூத்திரத்தை

உபயோகிக்கலாம்.

கோணத் தூரக் கூறுகளைப் (Polar coordinates) பயன்படுத்தினுல்,

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\; d\theta$$

என்னும் சூத்திரத்தை உபயோகிக்கலாம்.

சாரா மாறிக் கூறுகளை (Parametric co-ordinates) பயன்படுத்தினுல்,

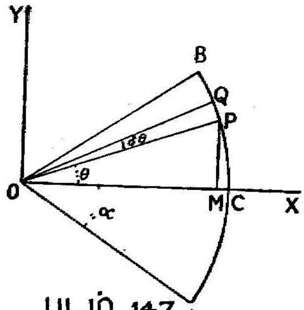
$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\; d\theta$$ என்னும்

சூத்திரத்தை உபயோகிக்கலாம்.

உதாரணம்

ஒரு சீர் வட்ட வில்லொன்றின் புவி ஈர்ப்பு மையம் 'a' ஆரையை யுடைய ஒரு சீர் வட்டத்தின் வில்லொன்று தன் மையத்தில் 2α கோணம் உண்டாக்குகிறது. அதன் புவி யீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

இதிலிருந்து, (i) ஒரு அரை வட்டக் கம்பியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தையும், (ii) ஒரு கால் வட்டக் கம்பியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தையும் வருவிக்க.



படம்_147

AB என்பது, தன் மையம் O வில் $2a$ என்னும் கோணத்தை எதிரமைக்கும் ஒரு வட்ட வில்லாகுக.

OC என்பது கோணம் AOB என்பதை இரு சமக்கூறிடுக. ஆயின், $\angle COB = \angle COA = \alpha$

OC யை x ஆயமாகவும், O விற்குச் செங்குத்தை y ஆயமாகவும் கொள்க.

P(x,y) என்பது வில்லின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக.

Q $(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பது வில்லின் மீது Pயிற்கு மிக்க அண்மையில் உள்ள புள்ளி யாகட்டும்

இனி, $\angle COP = \theta$ என்றும், வில் $CP = s$ என்றும் கொள்வோம்;

ஆயின், $PQ = \delta s$; $\angle POQ = \delta\theta$

$x = a\cos\theta$; $s = a\theta$ எனப் பெறுவோம்.

இப்பொழுது, நுண் பகுதியின் நீளம் $= PQ$

$$= \delta s$$

$$= a\,\delta\theta$$

நுண் பகுதியின் பொருண்மை $= \rho\, a\, \delta\theta$

*இப்பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் P (x, y) யில் உள்ளதாகக் கொள்ளலாம். (அ-து) $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ வில் உள்ளது.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_{-a}^{a} x\,ds}{\int_{-a}^{a} ds} = \frac{\int_{-a}^{a} a\cos\theta.\rho.a\,d\theta}{\int_{-a}^{a} \rho\,a\,d\theta}$$

$$(\text{அ-து})\ \bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} a\cos\theta\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha}$$

சமச் சீர்ப் பண்பால், புவி யீர்ப்பு மையம் நடு ஆரை OC யில் இருக்க வேண்டும்,

ஆகவே, $\bar{y} = O$

கி. தே. (i)

அரை வட்ட வில்லொன்றில் $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.

$$\text{ஆகவே, } \bar{x} = \frac{a \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

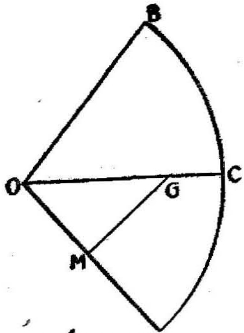
(அ-து) ஒரு அரை வட்ட வில்லின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் நடு ஆரையில், மையத்திலிருந்து $\frac{2a}{\pi}$ என்னும் தூரத்திலிருக்கும்.

கி. தே. (ii)

கால் வட்ட வில்லொன்றில், $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ஆகும்.

$$\text{ஆகவே, } \bar{x} = \frac{a \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4a}{\pi\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a$$

(அ-து) ஒரு கால் வட்ட வில்லின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் நடு ஆரையில், மையத்திலிருந்து $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}a$ என்னும் தூரத்திலிருக்கும்.



படம். 148A

இப்போது, OA, OB என்பவற்றை முறையே x, y அச்சுகளாகக் கொண்டால்,

$$\bar{x} = OM = OG \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

$$\bar{y} = MG = OG \sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\pi}$$

பயிற்சி 10·4

கீழ்க் காணும் விற்களின் புவி ஈர்ப்பு மையங்களைக் காண்க,

1. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்னும் வளை வரையில் அடுத்தடுத்துள்ள இரு பிறை முனைகளுக்கு இடையே உள்ள விற் பகுதி.

2. $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்னும் உருள் வளையில் (cycloid) அடுத்தடுத்துள்ள இரு பிறை முனைகளுக்கு இடையே உள்ள விற்பகுதி.

3. $x = a(\theta + \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்னும் உருள் வளையில் முதற் கால் வட்டத்தில் உள்ள விற் பகுதி.

4. இதயவுரு (Cardiod) $r = a(1 + \cos\theta)$ வின் முழு விற் பகுதி.

5. இதயவுரு $r = a(1 + \cos\theta)$ வின் முதற் கோட்டிற்கு (initial line) மேலுள்ள விற்பகுதி.

6. $y = c \cosh\frac{x}{c}$ என்னும் சங்கிலியத்தில் உச்சியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு புள்ளி (x, y) வரை உள்ள விற் பகுதி.

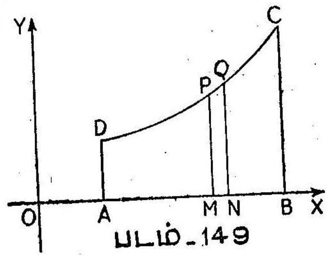
7. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளையத்தில், செவ்வகலத்தால் (latus rectum) வெட்டப்பட்ட விற் பகுதி.

8. $y^2 = 4ax$ என்னும் பரவளையத்தில் உச்சிக்கும் செவ்வகலத்தால் வெட்டப்படும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள விற் பகுதி.

II பரப்புகளின் புவி ஈர்ப்பு மையம்

$y = f(x)$ என்ற வளைவரை, x அச்சு, $x = a, x = b$ என்ற புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட குத்தாயங்கள் (ordinates) ஆகிய இவைகளுக்குக் கிடையே யுள்ள சீரான தகடொன்றின் புவிஈர்ப்பு மையம் காணல்.

$y = f(x)$ என்னும் வளை வரையின் வில் DC ஆகட்டும். $OA = a$; $OB = b$.



படம்-149

ABCD என்னும் பரப்பை நுண்ணிய வரித் துண்டுகளாகப் பிரிக்கவும். இவற்றுள் PMNQ என்பது, மாதிரி எடுத்துக் காட்டாக அமையும் ஒரு துண்டாகட்டும். இங்கு P (x, y) எனில், Q என்பது அதற்கு மிக்க அண்மையில் உள்ள $(x + \delta x, y + \delta y)$ என்னும் புள்ளியாகும்.

PMNQ வின் பரப்பு $= y\,\delta x$ [PMNQ என்பது ஒரு செவ்வகமாகக் கருதப் படலாம்.]

ஓர் அலகு பரப்பின் நிறை ρ எனில், PMNQ என்னும் வரித் துண்டின் நிறை $= y\,\delta x\,\rho$. இத்துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் PM உடைய மையப் புள்ளி $\left(x, \frac{y}{2}\right)$ ஆகும்.

முழுப் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ எனின்,

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x\,\delta m}{\Sigma\,\delta m} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} x.y\,\delta x.\rho}{\sum_{x=a}^{x=b} y\delta x.\rho}$$

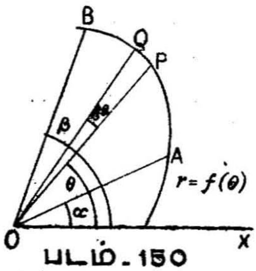
$$(அ\text{-}து)\ \bar{x}=\frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx} \qquad (1)$$

இதேபோல்,

$$\bar{y}=\frac{1}{2}\frac{\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx} \qquad (2)$$

கோணத் தூரக் கூறுகள் (Polar co-ordinates)

$r=f(\theta)$ என்னும் வளைவரை, $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ என்னும் ஆரைத் திசையிகள் (radius vectors) இவற்றிற்கு உள்ளடங்கிய வட்டக் கூறு சார்ந்த பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல்



படம் - 150

OPQ என்பது கொடுக்கப்பட்ட வட்டக் கூறு சார்ந்த பரப்பின் மிக நுண்ணிய பகுதியாகட்டும். இது ஒன்றுக்கொன்று $\delta\theta$ கோணத்தில் சாய்ந்து அடுத்தடுத்துள்ள $OP=r$, $OQ=r+\delta r$ என்னும் ஆரைத் திசையிகளுக்கு உள்ளடங்கி இருக்கட்டும்.

இந்நுண்ணிய பகுதியை ஒரு முக்கோணமாகக் கருதினால், அதன் பரப்பு

$$=\tfrac{1}{2}r(r+\delta r)\sin\delta\theta$$
$$=\tfrac{1}{2}r^2\delta\theta.$$

(சிறிய அளவின் முதற் படிக்கு ஒடுக்க) (to the first order of smallness)

இச்சிறு பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம், இம்முக்கோணத்தின் மைய வெட்டிச் சந்தியில் இருக்கும்.

இதன் கோணத் தூரக் கூறுகள் $\left(\frac{2r}{3},\ \theta\right)$ எனக் கொள்ளலாம்.

[ஏனெனில், δθவின் எல்லை மதிப்பு O ஆவதால்]
மேற்கூறிய புள்ளின் தெக்கார்ட்டியியின் கூறுகள்

$$\left(\frac{2r}{3}\cos\theta,\ \frac{2r}{3}\sin\theta\right)$$ என்பனவாகும்.

OAB என்னும் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் $(\overline{x}, \overline{y})$ எனில்

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{1}{2}r^2\delta\theta.\frac{2r}{3}\cos\theta}{\sum\limits_{\theta=\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}r^2\,\delta\theta}$$

$$(\text{அ-து})\ \overline{x} = \frac{2}{3}\,\frac{\int_\alpha^\beta r^3\cos\theta\,d\theta}{\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta}$$

$$\overline{y} = \frac{\sum\limits_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{1}{2}\ r^2\delta\theta.\frac{2r}{3}\sin\theta}{\sum\limits_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \frac{1}{2}\ r^2\,\delta\theta}$$

$$(\text{அ-து})\ \overline{y} = \frac{\frac{2}{3}\int_\alpha r^3\sin\theta d\theta}{\int_\alpha r^2\,d\,\theta}$$

உதாரணம் 1

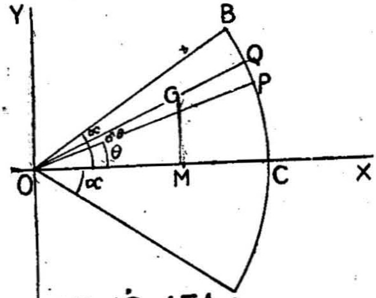
வட்டக் கோணப் பகுதியின் (sector) புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல்

a ஆரையுடைய ஒரு வட்டத்தில் நடுக் கோணம் 2 α உள்ள ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதி உள்ளது. அதன் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

AOB என்பது வட்டக் கோணப் பகுதியைக் குறிக்கட்டும்.

O என்ற மையத்தில் உள்ள கோணம் $\angle AOB = 2\alpha$ ஆகுக.

AB யின் மையப் புள்ளியை C எனக் குறிக்கவும்.



படம்-151

OC என்பது $\angle AOB$ யை, இரு சமக்கூறிடுக.

OC ஐ x அச்சாகவும், OC க்குச் செங்குத்தான OYஐ, y அச்சாகவும் கொள்க.

$$\angle XOP=\theta;\quad \angle POQ=\delta\theta$$

நுண் பகுதிப் பரப்பு $=POQ$

$$=\tfrac{1}{2}a^2\,\delta\theta$$

ஓர் அலகு, பரப்பின் நிறை ρ எனில், நுண் பகுதியின், பொருண்மை

$$=\tfrac{1}{2}a^2\,\delta\theta.\rho$$

இந்நுண் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் ஆயத் தொலைகள்(x,y) எனில்

$$x=OM=OG\cos\theta=\tfrac{2}{3}a\cos\theta$$

$$y=MG=OG\sin\theta=\tfrac{2}{3}a\sin\theta$$

ஆகவே, $$\bar{x}=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}x\,dm}{\int_{-\alpha}^{\alpha}dm}=\frac{\int_{-\alpha}^{\alpha}\tfrac{2}{3}a\cos\theta.\tfrac{1}{2}a^2\,d\theta.\rho}{\int_{-\alpha}^{\alpha}\tfrac{1}{2}a^2\,d\theta.\rho}$$

$$\bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha}d\theta}$$

$$=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}\qquad(1)$$

x அச்சோடு இப்பரப்பு, சமச்சீர் பெற்றுள்ளதால்,

$$\bar{y}=0\qquad(2)$$

கி. தே. 1

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ ஆனால், ஒரு அரை வட்டப் பகுதி கிடைக்கும்.

அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் $= \frac{2a \sin \pi/2}{3 . \pi/2} = \frac{4a}{3\pi}$

ஆகவே, ஒரு அரை வட்ட வடிவத் தகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அதன் நடு ஆரையின் மையத்திலிருந்து $\frac{4a}{3\pi}$ தூரத்தில் இருக்கும்.

கி. தே. 2

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ஆனால், ஒரு கால் வட்டப் பகுதி கிடைக்கும்.

அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் $= \frac{2a \sin \frac{\pi}{4}}{3 . \frac{\pi}{4}} = \frac{4\sqrt{2}\, a}{3\pi}$

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ ஆதலால், $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ OA, OB ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும்.

[படம் 148 ஐப் பார்]

ஆகவே, OA, OB என்பவற்றை x, y அச்சுகளாகக் கொண்டால்

$$\bar{x} = OM = OG \cos \frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}a}{3\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

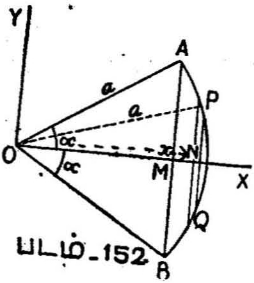
$$\bar{y} = MG = OG \sin \frac{\pi}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

ஆகவே, ஒரு கால்வட்ட வடிவத் தகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் நடு ஆரையின் மையத்திலிருந்து $\frac{4\sqrt{2}a}{3\pi}$ தூரத்தில் இருக்கும்.

அக்கால் வட்டத் தகட்டின் எல்லை ஆரைகளை x, y அச்சுகளாகக் கொண்டால், அதன் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$ ஆகும்.

உதாரணம் 2

வட்டத்தின் (நாண் வெட்டுத்) துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல்



படம்-152

AMBX என்பது O வை மையமாகவும், a யை ஆரை யாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் (நாண் வெட்டுத்) துண்டு ஆகட்டும்.

வட்டத் துண்டின் உயரம் $= MX = h$ என்க.

வட்டத் துண்டு மையத்தில் 2α என்னும் கோணத்தை எதிரமைக்கட்டும்.

OX ஐ x அச்சாகவும், OX க்குச் செங்குத்தை y அச்சாகவும் கொள்க.

வட்டத் துண்டை OX க்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடுகளால் நுண்ணிய நீள் வரித் துண்டுகளாப் பிரிக்கவும்.

இவற்றில், x தூரத்தில் உள்ள PQ நீளமும், δx அகலமும் கொண்ட ஒரு நுண்ணிய செவ்வகப் பகுதியைக் கருதுவோம்.

ஓர் அலகு பரப்பின் நிறை ρ எனில், இதன் நிறை $= 2\sqrt{a^2-x^2}\, dx\rho$ ஆகும்.

இதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் N இல் உள்ளது. ஆகவே, வட்டத் துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் OC யில் இருக்கும்.

$$\therefore \bar{x} = \frac{\int_{a-h}^{a} 2\sqrt{a^2-x^2}\, dx.\rho.x}{(\text{வட்டத்துண்டின் நிறை})} = \frac{2\int_{a-h}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, xdx}{\text{வட்டத்துண்டின் பரப்பு}}$$

இனி, $2\int \sqrt{a^2-x^2}\, xdx = -\int \sqrt{a^2-x^2}.\, 2x\, dx =$

$$-\int (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\, d(a^2-x^2) = -\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore 2\int_{a-h}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\quad dx = \left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{a-h}^{a} = \left[a^2-(a-h)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

இப்பொழுது, a h=OM=a cos α

$$\therefore \frac{2}{3}\left[a^2-(a-h)^2\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left[a^2-a^2\cos^2\alpha\right]^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left[a^2\sin^2\alpha\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}a^3\sin^3\alpha$$

வட்டத் துண்டின் பரப்பு=வட்டக் கோணப் பகுதி OAXB யின் பரப்பு

— முக்கோணம் OAB யின் பரப்பு

$$=\frac{1}{2}a^2(2\alpha)-\frac{1}{2}.OA.\ OB.\sin 2\alpha$$

$$=a^2\alpha-a^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\frac{2}{3}a^3\sin^3\alpha}{a^2(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}=\frac{2a\sin^3\alpha}{3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha)}$$

$$\bar{y}=O$$

கி. தே.

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{2}$ எனில், வட்டத் துண்டு ஒரு அரை வட்டப் பகுதி யாகும்.

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{4a}{3\pi}$$

பயிற்சி 10·5

கீழ்க் கண்ட பரப்புகளின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காண்க.

1. சீர் நீள் வட்டத்தின் முதல் கால்வட்டப் பகுதி (uniform elliptic quadrant)

2. $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவுக்கும், $x=h$ என்ற இரட்டைக் குத்தாயத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு.

3. $y^2=4ax$ என்ற பரவளைவுக்கும், x அச்சுக்கும், செவ்வகலத் திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு.

4. $y^2=4ax$, $x^2=4ay$ என்ற இரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு.

5. $x=a(\theta-\sin\theta)$; $y=a(1-\cos\theta)$ என்ற உருள் வளையின் ஒரு வில்லுக்குட்பட்ட பரப்பு.

6. உருள்வளை $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$. அதன் அடி, y ஆயம் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு.

7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ இல் முதல் கால்வட்டத்திலுள்ள பரப்பு.

8. $y=\sin x$ என்னும் வளை வரைக்கும் x அச்சுக்கும் இடையுள்ள பரப்பு.

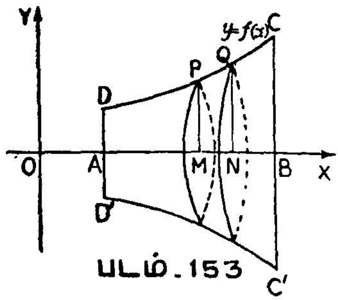
9 $y=c\cosh\frac{x}{c}$ என்னும் சங்கிலியம், x அச்சு, y அச்சு, $x=a$ யில் உள்ள குத்தாயம் இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு.

10. $r=a(1+\cos\theta)$ என்னும் இதய உருவிற்கு உள்ளடங்கிய பரப்பு.

11. $r^2=a^2\cos 2\theta$ என்ற வளைவரையில் ஒரு வளையத்திற்கு (loop) உட்பட்ட பரப்பு.

12. OA என்னும் விட்டம் கொண்ட ஒரு அரைவட்டத் தகட்டில், ஒவ்வொரு புள்ளியில் உள்ள செறிவு (density) Oவிலிருந்து அப் புள்ளியின் தூரத்திற்கு விகிதப் பொருத்தமுடையதாக இருக்கிறது. அத்தகட்டின் புவி யீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

III உருளைப் பருமனின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல் (C. G. of a solid of revolution)



படம்.153

$y=f(x)$ என்னும் வளை வரை, x அச்சு, $x=a$, $x=b$ என்பவற்றின் லுள்ள குத்தாயங்கள் ஆகிய இவற்றிற்கு இடைப்பட்ட பரப்பு x அச்சை சுற்றிச் சுழல்கிறது. அப்பொழுது ஓர் உருளைப் பருமம் உண்டாகிறது. இப்பருமனின் புவி ஈர்ப்பு மையம் சமச் சீர்ப் பண்பால் சுற்றலச்சின் மீது இருப்பதால், $\bar{y}=0$ எனக் காண வேண்டும். ஆகவே, $\bar{x}$ இன் மதிப்பை மாத்திரம் பெற்றால் போதும்.

$P(x, y)$; $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பன உருளைப் பருமத்தை உண்டாக்கும் வளைவரை $y=f(x)$ இன் மீது ஒன்றுக்கொன்று மிக்க அண்மையிலுள்ள இரு புள்ளிகளாகுக.

P, Q என்பனவற்றிலிருந்து வரையப்படும் குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்ட நுண்ணிய பரப்பு PMNQ, x அச்சைச் சுற்றும்போது நுண்ணிய பருமத்தை உண்டாக்குகிறது. Q ஆனது Pயை மிகவும் அணுகும்போது இப்பருமம் உருளை வடிவமாக இருக்கும்.

இந் நுண் பகுதிப் பருமம் $= \pi y^2 \delta x$.

ஓர் அலகு பருமத்தின் நிறை ρ எனில்,

இந் நுண் பருமப் பகுதியின் நிறை $= \pi y^2 \delta x \rho$. Q ஆனது Pயை மிகவும் அணுகும்போது இந் நுண் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் M இல் உள்ளது எனக் கொள்ளலாம். ஆகவே, அதன் x ஆயத் தொலையை x எனக் கொள்ளலாம்.

ஆயின் $$\bar{x} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \pi y^2 \delta x . \rho . x}{\sum_{x=a}^{x=b} \pi y^2 \delta x . \rho}$$

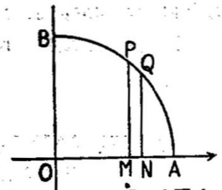
$$= \frac{\int_a^b y^2 x \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx}$$

உதாரணம் 1

ஓர் அரைக் கோளப் பருமத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல் (C. G. of a solid hemisphere)

OAB என்பது a ஆரையையுடைய ஒரு வட்ட நாற்கூறு எனக் கொள்வோம்.

இது x அச்சை ஒரு சுற்றுச் சுற்றினால் அரைக் கோளம் கிடைக்கும்.



படம்-154

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$

$$\therefore y^2=a^2-x^2$$

x இன் எல்லைகள் O முதல் A வரை, (அ-து) O முதல் a வரை. இப்பருமம் x அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுப் பருமனாக நாம் பெறுவதால், x அச்சுக்குச் சமச்சீர் பெற்றது.

எனவே, $\bar{y}=O$

$$\text{இனி}, \bar{x}=\frac{\int_0^a y^2 x\,dx}{\int_0^a y^2\,dx}=\frac{\int_0^a (a^2-x^2)\,x\,dx}{\int_0^a (a^2-x^2)\,dx}$$

$$=\frac{\left[a^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a}=\frac{3a}{8}$$

(அ-து) ஓர் அரைக் கோளப் பருமத்தின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் தள அடியிலிருந்து அவ்வடி மையம் வழியாகச் செங்குத்தாக உயரும் அரை விட்டத்தில் $\frac{3a}{8}$ உயரத்தில் இருக்கும்.

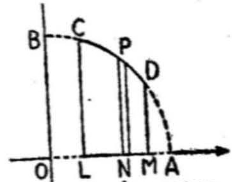
உதாரணம் 2

ஒரு சீர்க் கோளப் பருமத்தின் ஒரு பட்டைப் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காண்க.

(C. G of a belt of a uniform solid sphere)

OAB என்ற வட்ட நாற் கூறின் ஒரு பகுதியாக CLMD என்பது x அச்சைப் பற்றிச் சுற்றினால், கோளப் பருமத்தின் ஒரு பட்டைப் பகுதி நமக்குக் கிடைக்கும்.

OL = b; OM = c என்க.



படம்-155

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$. x யின் எல்லைகள் L முதல் M வரை.

P (x, y) என்பது பட்டைப் பகுதியில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில், PN என்னும் குத்தாயம் வரைக.

y நீளம், δx அகல முடைய நுண்ணிய நீள் வரித் துண்டு x அச்சைச் சுற்றி, நுண்ணிய பட்டைப் பகுதியின் பருமத்தைத் தருகின்றது.

அதன் நிறை $\pi y^2 \delta x . \rho$

அதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் N இல் உள்ளது.

ஆகவே, $$\bar{x} = \frac{\int_b^c y^2 x \, dx}{\int_b^c y^2 dx} = \frac{\int_b^c (a^2-x^2)\, x \, dx}{\int_b^c (a^2-x^2)\, dx}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}(b+c)\,[2a^2-b^2-c^2]}{3a^2-b^2-bc-c^2}$$

சமச்சீர்ப் பண்பால் $\bar{y}=O$

ஆகவே, a ஆரையை உடைய கோளத்தில், மையத்திலிருந்து b, c என்னும் தூரங்களில் வரையப்பட்ட சமாந்தர தளங்களுக்கு உட்பட்ட கோளப் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் மையத்திலிருந்து, அதன் சமச்சீர் அச்சில் $\frac{3}{4}(b+c) \quad (2a^2-b^2-c^2) / (3a^2-b^2-bc-c^2)$ என்னும் தூரத்தில் இருக்கும்.

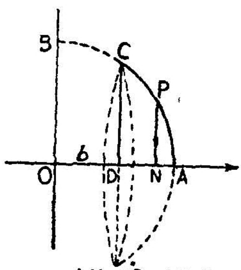
கி, தே.

$b=o; c=a$ எனில், அரைக் கோள வகையைப் பெறுகிறோம். $\bar{x}=\frac{3}{8}a$ ஆகும்.

உதாரணம் 3

கோளத் துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் (C. G of a segment of a sphere)

'a' ஆரையாக வுடைய ஒரு கோளத்தை, அதன் மையத்திலிருந்து b தூரத்தில் உள்ள தளம் ஒன்று வெட்டுவதால் உண்டாகும் கோளத் துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காணல்



படம்-156

கோளத்தின் மையத்தை ஆதியாகவும், அதிலிருந்து தளத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையும் ஆரையை x அச்சாகவும் கொள்வோம்.

OAD என்னும் வட்ட நாற் கூறின் ஒரு பகுதியாகிய வட்டத் துண்டு DAC என்பது x அச்சைப் பற்றிச் சுற்றினால் நமக்கு வேண்டிய கோளத் துண்டு உண்டாகும்.

OD = b; OA = a

x இன் எல்லைகள் D முதல் A வரை

PN என்னும் நுண்ணிய நீள் வரித் துண்டுகளைப் போல், D முதல் A வரை உள்ள எண்ணில் துண்டுகள் x அச்சைச் சுற்றிக் கோளத் துண்டை நாம் பெறுகிறோம்.

இந் நுண்ணிய துண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் Nஇல் உள்ளது.

ஆகவே, $$\bar{x} = \frac{\int_b^a y^2 x\,dx}{\int_b^a y^2\,dx}$$

$$= \frac{\int_b^a (a^2 - x^2)\,x\,dx}{\int_b^a (a^2 - x^2)\,dx} = \frac{\left[\frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_b^a}{\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_b^a}$$

$$= \frac{3\,(a+b)^2}{4\,(2a+b)}$$ (சுருக்கிய பின்)

கி. தே. 1

b= 0, எனில், கோளத் துண்டு அரைக் கோளமாகிறது. ஆகவே,

$$x = \frac{3}{8}a$$

கி. தே. 2

கோளத் துண்டின் உயரம் h எனில்,

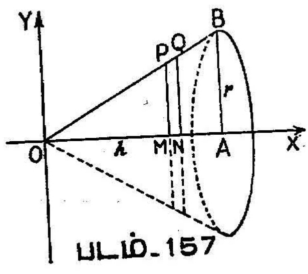
$a-b= h;\ \therefore\ b=a-h$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{3\,(2a-h)^2}{4\,(3a-h)}$$

உதாரணம் 4

சீரான கனக் கூம்பின் புவி யீர்ப்பு மையம் காணல்

(C. G of a uniform solid cone)



படம்-157

கூம்பின் உயரம் h என்றும், அதன் அடியின் ஆரை r என்றும் கொள்வோம்.

இப்பொழுது, OAB என்ற நேர்க் கோண முக்கோணத்தில் OA=h; AB=r ஆகட்டும். OA வை x அச்சாகக் கொள்வோம். OAB என்ற முக்கோணத்தை x அச்சுப் பற்றிச் சுற்றினால், நமக்கு வேண்டிய கூம்பு ஓர் உருளைப் பருமனாகக் கிடைக்கும்.

OB யின் சமன்பாடு $y=mx$ எனக் கொள்க.

இங்கு $m= \tan \angle AOB = \frac{r}{h}$

$\therefore$ OB யின் சமன்பாடு $y= \frac{r}{h}x$ என்றாகும்.

OB யில், P (x, y) என்னும் புள்ளி எடுத்து, PM என்ற குத்தாயம் வரைக.

Q $(x+\delta x,\ y+\delta y)$ என்பது Pக்கு மிக்க அண்மையில் உள்ள புள்ளி ஆகட்டும்.

Q விலிருந்து QN என்ற குத்தாயம் வரை.

PMNQ என்னும் நுண்ணிய நீள் வரித் துண்டு x அச்சைப் பற்றிச் சுற்றினால், கூம்பின் ஒரு நுண்ணிய பகுதி கிட்டும்.

இதன் நிறை $\pi y^2 \delta x \rho$.

இதன் புவி யீர்ப்பு மையம் M இல் உள்ளதாகக் கொள்ளலாம். x இன் எல்லைகள் o முதல் h வரை.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_o^h \pi\, y^2\, dx.\rho x}{\int_o^h \pi\, y^2 \rho.\, dx} = \frac{\int_o^h y^2 x dx}{\int_o^h y^2\, dx}$$

$$= \frac{\int_o^h \frac{r^2}{h^2} x^2\, x dx}{\int_o^h \frac{r^2}{h^2} x^2\, dx} = \frac{\int_o^h x^3\, dx}{\int_o^h x^2\, dx}$$

$$= \quad \frac{3h}{4}$$

சமச் சீர்ப் பண்பினால், $\bar{y} = 0$

ஆகவே, ஒரு கனக் கூம்பின் புவி யீர்ப்பு மையம், அதன் அச்சின் மீது உச்சியில் இருந்து $\frac{3h}{4}$ தூரத்திலும், அடியிலிருந்து $\frac{h}{4}$ தூரத்திலும் இருக்கின்றது.

பயிற்சி 10.6

I கீழ்க் காணும் உருளைப் பருமங்களின் (solids of revolution) புவி யீர்ப்பு மையம் காண்க.

1. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளையம் $x=h$ என்னும் குத்தாயத்தினால் வெட்டப்பட்டு, OX பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

2. $y^2=4ax$ என்னும் பரவளையம் செவ்வகலத்தால் வெட்டப் பட்டு OX பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள் வட்டத்தின் முதல் கால் வட்டப் பகுதியைப் பேரச்சு (major axis) பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

4. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்னும் நீள் வட்டத்தின்முதல் கால்வட்டப் பகுதியைச் சிற்றச்சு (minor axis) பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

5. இதயவுரு $r=a\,(1-\cos\theta)$ என்பதை x அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

6. $x=a\,(\theta+\sin\theta)$; $y=a(1-\cos\theta)$ என்னும் உருள் வளை y அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

7. $y=\sin x$ என்னும் வளைவரை x அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்

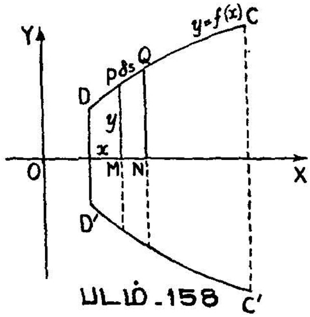
8. $y^2=4a\,x$, $x^2=4by$ என்னும் பரவளையங்களுக்கு உட்பட்ட பரப்பை x அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற வரும் பருமம்.

II (1) ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பில், ஒவ்வொரு புள்ளியில் உள்ள செறிவும், அக்கூம்பின் அடிப் பாகத்திலிருந்து அப்புள்ளியின் தூரத்தைப் போல் k மடங்கு எனின், அக்கூம்பின் புவி யீர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

2. a ஆரையுடைய ஒரு அரைக் கோளப் பருமத்தில், ஒவ்வொரு புள்ளியில் உள்ள செறிவும், அத்தள அடியிலிருந்து புள்ளியின் செங்குத்துத் தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு விகிதசமமாக இருந்தால், அதன்புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

IV சுற்றின் புறப் பரப்புகளின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல் [C. G. of the surface of a solid of revolution (a hollow solid)]

$y=f(x)$ என்னும் வளை வரையின் வில் DC என்பதை x அச்சுப் பற்றிச் சுற்ற நமக்கு ஒரு 'சுற்றின் மேற்பரப்பு' (Surface of revolution) கிட்டும்.



படம்-158

நுண்ணிய விற்பகுதி $PQ=\delta s$ என்பது x அச்சுப் பற்றிச் சுற்றும்போது, அது உண்டாக்கும் நுண்ணிய புறப் பரப்பு $2\pi y\delta s$ ஆகும். புறப் பரப்பின் ஓர் அலகின் நிறை ρ எனில், நுண் பகுதியின் பொருண்மை $=2\pi y\delta s\rho$.

இப்பகுதி ஒரு வட்ட வளையம் போலக் கருதப்படலாம். இதன் புவி ஈர்ப்பு மையம் (x,o) வில் உள்ளது.

ஆகவே,
$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{x=a}^{x=b} 2\pi y\delta s.\rho.x}{\sum\limits_{x=a}^{b} 2\pi y\delta s.\rho} = \frac{\int_{x=a}^{b} xyds}{\int_{x=a}^{x=b} yds}$$

சமச்சீர்ப் பண்பினால் $\bar{y}=0$ ஆகும்

தெக்கார்ட்டின் கூறுகள் பயன் படுத்தினால்,

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$ என்றும்

கோணத் தூரக் கூறுகளை உபயோகித்தால்

$$ds=\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}\,d\theta$$ என்றும் பிரதியீடு செய்து விடை காணலாம்.

உதாரணம் 1

அரைக் கோளத்தின் புறப் பரப்பிற்குப் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல் (C.G. of a hollow hemisphere)

ஒரு வட்ட நாற்கூறின் வில், AB x அச்சை ஒரு சுற்றுச் சுற்றினால், ஓர் அரைக் கோளத்தின் புறப் பரப்புக் கிடைக்கும். வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$

[படம் 154 ஐப் பார்க்க]

$$\bar{x} = \frac{\int^{a} xy\,ds}{\int_{o}^{a} y\,ds}$$

இங்கு $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \quad \left[x^2+y^2=a^2\right.$$

$$\therefore 2x+2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\left.\because \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\right]$$

$$= \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{a}{y}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_o^a x.\,y\,\frac{a}{y}\,dx}{\int_o^a y.\,\frac{a}{y}\,dx} = \frac{\int_o^a x\,dx}{\int_o^a dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_o^a}{\left[x\right]_o^a}$$

$$= \frac{a}{2}$$

அதாவது ஓர் அரைக் கோளத்தின் புறப் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் தள வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து செங்குத்தாக உயரும் அரை விட்டத்தின் சரிபாதியில் இருக்கிறது.

உதாரணம் 2

ஒரு கோள முகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல்
(Find the C. G of a spherical cap of a hollow sphere)

உயரம் h உடைய ஒரு கோள முகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல்.

ஒரு வட்ட நாற் கூறின் வில் AB யின் ஒரு பகுதியாகிய AC யை, x அச்சுப் பற்றி ஒரு சுற்றுச் சுற்றினால், ஒரு கோள முகட்டின் புறப் பரப்பு கிடைக்கும்.

[படம் 156 ஐப் பார்க்க]

இம் முகட்டின் புவி ஈர்ப்பு மையம் $\bar{x}\ \bar{y}$ என்க.

முன்போலவே, $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{\int_{a-h}^{a} xy\,ds}{\int_{a-h}^{a} y\,ds}$$

$$= \frac{\int_{a-h}^{a} x\,dx}{\int_{a-h}^{a} dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a-h}^{a}}{\left[x\right]_{a-h}^{a}}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{2} - \frac{(a-h)^2}{2}}{a-(a-h)} = \frac{1}{2}(2a-h)$$

$$= \frac{1}{2}(a+a-h)$$

$$= \frac{1}{2}(OA+OD)$$

$$= \frac{1}{2}(OM+MA+OM-MD)$$

[M என்பது DAயின் மையப் புள்ளி எனில்]

$$= OM$$

ஆகவே, ஒரு கோள முகட்டின் புறப் பரப்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் தளவட்டத்தின் மையத்திலிருந்து செங்குத்தாக உயரும் கோட்டில் சரிபாதியில் இருக்கிறது. (அ-து) அதன் உயரத்தைச் சமக்கூறிடுகிறது.

உதாரணம் 3

ஒரு சீர்க் கோள புறப் பரப்பின் ஒரு பட்டைப் பகுதியின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காண்க. (C. G. of a zone of a hollow sphere)

a ஆரையுடைய ஒரு குழிக் கோளத்தின் மையத்திலிருந்து b, c தூரங்களில் உள்ள இரு இணை தளங்களால் வெட்டப்படும் கோளத்தின் புறப் பரப்பின் பகுதியினுடைய புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்போம்.

a ஆரையுடைய வட்டத்தின் நாற்கூறு OAB ஆகுக.

OL = b; OM = c என்க.

[படம் 155 ஐப் பார்க்க]

L, M என்ற புள்ளிகளில் குத்தாயங்கள் வரைக.

இவை AB என்ற வில்லை C, D என்ற புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும்.

CD என்ற விற்பகுதியை x அச்சைப் பற்றிச் சுற்றினால், ஒரு குழிக் கோளப் புறப் பரப்பின் ஒரு பட்டைப் பகுதி கிடைக்கும்.

வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2+y^2=a^2$

xஇன் எல்லைகள் L முதல் M வரை.

முன் போலவே, $\bar{y}=0$

$$\bar{x} = \frac{\int_b^c x\, y ds}{\int_b^c y\, ds} = \frac{\int_b^c x\, dx}{\int_b^c dx} = \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_b^c}{\left[x\right]_b^c}$$

$$= \frac{\frac{c^2-b^2}{2}}{c-b} = \frac{b+c}{2}$$

ஆகவே, கோளத்தின் புறப் பறப்பின் பட்டைப் பகுதியின் புவிஈர்ப்பு மையம், அப் பட்டைப்பகுதியைக் கோளத்திலிருந்து வெட்டி எடுக்கும் தளங்களுக்கு நடுவில், அவற்றிற்குச் செங்குத்தாக வரையும் ஆரையில் உள்ளது.

உதாரணம் 4

ஒரு சீரான குழிக் கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் காணல் (C. G. of a uniform hollow cone)

கூம்பின் உச்சியை O என்றும், அதன் அடிப்பாகத்தின் மையத்தை A என்றும், அதன் அச்சை OA என்றும் குறிப்போம்.

$OA=h$; $AB=r$ என்க.

[படம் 157 ஐப் பார்க்க]

OA வை x அச்சாகவும் OA யிற்குச் செங்குத்தை y அச்சாகவும் கொள்க.

OAB என்ற செங்கோண முக்கோணத்தை OA பற்றிச் சுற்றினால் OB என்பது குழிக் கூம்பின் புறப் பரப்பைத் தரும்.

$PQ=\delta s$ என்பது OB யின் நுண் பகுதியாகுக.

PQ ஆனது, OA யைப் பற்றிச் சுற்றும் பொழுது,

குழிக் கூம்பின் புறப் பரப்பின் நுண்ணிய பட்டைப் பகுதி கிடைக்கும். இதன் புவி ஈர்ப்பு மையம், அதன் மையத்திலிருக்கும்.

இப்பகுதி O விலிருந்து x தூரத்தில் இருந்தால், புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் தூரம் x ஆகும்.

சமச்சீர்ப் பண்பால், புவி ஈர்ப்பு மையம் x அச்சில் இருக்கும்.

ஆகவே, $\bar{y} = 0$

இனி, OB யின் சமன்பாடு $y=mx$ என்க.

$$m=\tan\alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{r}{h}.$$

∴ OBயின் சமன்பாடு $y=\frac{r}{h}x$

இனி, $$\bar{x} = \frac{\int_0^h x\,y\,ds}{\int_0^h y\,ds}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{+1\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2+h^2}{h^2}} = \frac{l}{h}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h x.\frac{r}{h}x.\frac{l}{h}dx}{\int_0^h \frac{r}{h}x.\frac{l}{h}\,dx} = \frac{\int_0^h x^2\,dx}{\int_0^h x\,dx}$$

$$= \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h}{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h} = \frac{2}{3}h$$

ஆகவே, ஒரு குழிக் கூம்பின் புவி ஈர்ப்பு மையம் அதன் அச்சின் மீது உச்சியிலிருந்து $\frac{2h}{3}$ தூரத்திலும், அதன் அடியிலிருந்து $\frac{h}{3}$ தூரத்திலும் உள்ளது.

பயிற்சி 10.7

கீழ்க் காணும் வளை வரைகளின் சுற்றுகையால் உருவாகும் புறப் பரப்புகளின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தைக் காண்க.

1. $x=a(\theta+\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ என்னும் உருள் வளை y அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகின்றது.

2 $r=a(1+\cos\theta)$ என்னும் இதய வுரு அதன் அச்சுப் பற்றிச் சுற்றுகிறது.

3. $r^2=a^2\cos 2\theta$ வின் ஒரு வளையம் அதன் முதற் கோடு பற்றிச் சுற்றுகிறது.

11. சங்கிலியம் அல்லது கயிற்று வளை

(Catenary)

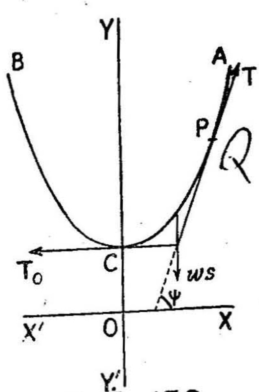
1. சங்கிலியம் (Catenary)

ஒரு சீரான இழை அல்லது சங்கிலி (ஒரே நிலைக்குத்துக் கோட்டி லில்லாத) இரு புள்ளிகளுக்கிடையே புவி ஈர்ப்பு விசைக் காரணமாகக் கட்டின்றித் தொங்கும்பொழுது, சமநிலையில் இழை மேற்கொள்ளும் உரு வம் சங்கிலியம் அல்லது கயிற்று வளை எனப்படும்.

சங்கிலி அல்லது இழையின் ஒவ்வொரு அலகு நீள எடையும் மாறாதிருப்பின், அது சீர்ச் சங்கிலியம் (அல்லது) பொதுச் சங்கிலியம் எனப்படும் (Uniform or Common catenary)

2. பொதுச் சங்கிலியம் (Common catenary)

ABC என்பது புவிஈர்ப்பு விசை காரண மாகக் கட்டின்றித் தொங்கும் சீரான இழை அல்லது சங்கிலியைக் குறிக்கட்டும். C என் பது அதன் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி ஆகட் டும்.



படம் - 159

CA என்னும் பகுதியில் P யாதேனு மொரு புள்ளி ஆகுக.

C யிலிருந்து இழை நீளத்தில் அளந்த CP என்னும் வில்லின் நீளத்தை s எனக் குறிப்போம். ஒவ்வொரு அலகு நீளச் சங்கி யின் எடை ω ஆகுக. ஆகவே, CP யின் எடை ωs ஆகும்.

இழைக்கு P யில் உள்ள தொடு கோடு கிடைக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணத்தை ψ எனக் குறிப்போம்.

P,C என்பனவற்றிலுள்ள இழுவிசைகள் முறையே T, T_0 எனக் கொள்வோம். இங்கு T_0 என்பது கிடையாகச் செயல்படும். இப்பொழுது, CP என்னும் பகுதியின் சமநிலையைக் கருதுவோம். இழை சமநிலை மேற்கொண்ட உடன், இழையின் எப்பகுதியையும் ஒரு கட்டிறுக்கப் பொருளாகக் கருதலாம் என்பது தெளிவு.

அதன் மேல் செயல்படும் விசைகளாவன:

(i) Cயில் கிடையாகச் செயல்படும் இழுவிசை T_0

(ii) Pயில் தொடு கோட்டின் வழிச் செயல்படும் இழுவிசை T

(iii) வில் CP யின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தின் வழியாகச் செயல்படும் அதன் எடை ωs

இம் மூன்றும், ஒரே தளத்திலுள்ள விசைகளின் தாக்குதலின் காரணமாக CP என்ற சங்கிலி சமநிலையில் இருப்பதால், எடை ωs இன் நிலைக்குத்துத் தாக்கக் கோடு, T_0, T என்பனவற்றின் தாக்கக் கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி வழிச் செல்லவேண்டும்.

விசைகளைக் கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் பிரிக்க, நாம் பெறுவது

$$T \cos \psi = T_0 \qquad (1)$$

$$T \sin \psi = \omega s \qquad (2)$$

(2) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, 2 நாம் பெறுவது

$$\tan \psi = \frac{\omega s}{T_0} \qquad (3)$$

இப்பொழுது, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசையை c நீளமுள்ள சங்கிலியின் எடைக்குச் சமமெனக் கொள்வோம்.

ஆகவே, $T_0 = \omega c \qquad (4)$

$\therefore$ (3) லிருந்து நமக்குக் கிட்டுவது.

$$\tan \psi = \frac{s}{c}$$

(அ-து) $s = c \tan \psi$ (5)

இதுவே, சங்கிலியத்தின் உள்ளியல்பு (intrinsic equation) சமன்பாடாகும்.

3. பொதுச் சங்கிலியத்தின் தெக்கார்ட்டின் சமன்பாடு (Cartesian equation of the common Catenary)

பொதுச் சங்கிலியத்தின் உள்ளியல்பு சமன்பாடு

$s = c \tan \psi$ என நிறுவியுள்ளோம்.

கிடைக் கோட்டை x அச்சாகக் கொண்டால்

$$\tan \psi = \frac{dy}{dx}$$

ஆகவே, சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு,

$$s = c\frac{dy}{dx} \text{ என்றாகும்.} \qquad (1)$$

இதை, x குறித்து வகையிட (diffentiate) நாம் பெறுவது

$$\frac{ds}{dx} = c\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

(அ-து) $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = c\frac{d^2y}{dx^2}$

$p = \frac{dy}{dx}$ என்று இடுக.

எனின், $\sqrt{1+p^2} = c\frac{dp}{dx}$

(அ-து) $\frac{dx}{c} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}$

இதைத் தொகையிட (integrating) நாம் பெறுவது

$$\frac{x}{c} + K = \sinh^{-1}(p)$$

(அ-து) $\sinh^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{c} + K.$

இப்பொழுது, நாம் ஆயங்களை வசதியாகத் தேர்ந்தெடுத்துக் கொள் வோம்.

சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்தபுள்ளி C வழியாகச் செல்லும் நிலைக்குத்தை y அச்சாகக் கொள்வோம்.

ஆயின், x=o ஆகும் பொழுது $\frac{dy}{dx}=O$

$$\therefore K=O$$

ஆகவே, $\sinh^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{c}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\sinh\frac{x}{c} \qquad (2)$$

மறுபடியும், தொகையீடு காண, நாம் பெறுவது

$$y=c\cosh\frac{x}{c}+L$$

ஆதியை C க்குக் கீழாக, c தூரத்தில் எடுத்துக் கொண்டால்

x=o என்னும் பொழுது, y=c ஆகும்.

$$\therefore L=O$$

ஆகவே,

$$y=c\cosh\frac{x}{c}$$

என்பது சங்கிலியத்தின் தெக்கார்ட்டின் சமன்பாடாகும்.

4. வரையறைகள்

$\cosh\frac{x}{c}$ என்பது இரட்டைச் சார்பு என்பதனுல், அந்த வளைவு y அச்சுப் பற்றிச் சமச் சீருடையதாக(Symmetrical) இருக்கும்.(அ-து) சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி வழிச்செல்லும் நிலைக்குத்துக் கோடு பற்றிச் சமச் சீருடை யதாக இருக்கும். இந்தச் சமச் சீர்க்கோடு சங்கிலி யத்தின் அச்சு எனப்படும்.

c என்பது சங்கிலியத்தின் நிலையான அளபுரு (Parameter) ஆகும்.

சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி C க்குக் கீழாக c என்னும் தூரத்திலுள்ள கிடைக் கோடு இயக்குவரை (Directrix) எனப்படும்.

மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி C என்பது சங்கிலியத்தின் உச்சி (vertex) எனப்படும்.

சங்கிலியம் தொங்விடப்படும் A, B என்னும் இரு புள்ளிகளும் கிடைக் கோட்டிலிருந்தால், அவற்றிற்கு இடைய உள்ள தூரம் AB என்பது **வளைவு விட்டம்** (span) எனப்படும்.

மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி C என்பது AB யின் கீழ் உள்ள ஆழஅளவு **தொய்வளவு** (sag) எனப்படும்.

5. சங்கிலியத்தின் பண்புகள்

சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு

$s = c \tan\psi$ (1) என்றும்.

$y = c\cosh\dfrac{x}{c}$ (2) என்றும் பார்த்தோம்.

$\therefore\ s = c\dfrac{dy}{dx} = c\sinh\dfrac{x}{c}$ (3) [s, x என்பனவற்றிற்குள்ள தொடர்பு]

$\therefore\ y^2 - s^2 = c^2\cosh^2\dfrac{x}{c} - c\sinh^2\dfrac{x}{c} = c^2$

ஆகவே, $y^2 = s^2 + c^2$ (4)

மேலும், $y^2 = s^2 + c^2$

$= c^2\tan^2\psi + c^2 = c^2\sec^2\psi$

$\therefore\ y = c\sec\psi$ (5) [y, ψ என்பவற்றிற்குள்ள தொடர்பு]

இப்பொழுது, $\dfrac{dx}{ds} = \cos\psi$

$\dfrac{ds}{d\psi} = c\sec^2\psi$ [$\because\ s = c\tan\psi$]

$\therefore\ \dfrac{dx}{d\psi} = \dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{ds}{d\psi} = \cos\psi\cdot c\sec^2\psi$

$\therefore\ \dfrac{dx}{d\psi} = c\sec\psi$

$$\therefore\ dx = c \sec\psi\, d\psi$$

இதைத் தொகையீடு காண, நாம் பெறுவது

$$x = c \log(\sec\psi + \tan\psi) + A$$

$x=0$ எனில், $\psi=0$ என்பதால், $A=0$ ஆகும்.

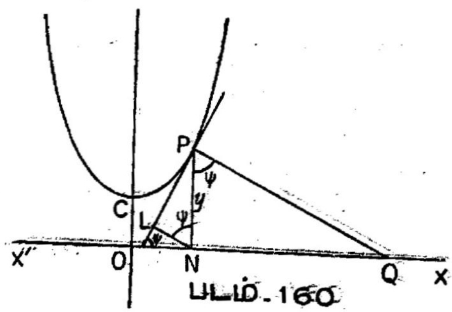
$\therefore\ x = c \log(\sec\psi + \tan\psi)$ (6) [x, ψ என்பவற்றிற்குள்ள தொடர்பு]

அன்றியும், $x = c \log\left(\frac{y}{c} + \frac{s}{c}\right)$, [(1), (5) என்பவற்றிலிருந்து பிரதியிட]

$$x = c \log\left(\frac{y+s}{c}\right) \qquad (7)$$

சங்கிலியத்தின் வளைவரை ρ எனில்

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = c \sec^2\psi \qquad (8)$$



படம்-160

PQ என்ற வரைச் செங்கோடு (normal to the curve) இயக்குவரையை Q வில் சந்திக்கட்டும்.

$$\begin{aligned} PQ &= y \sec\psi \\ &= c \sec\psi . \sec\psi \\ &= c \sec^2\psi \\ &= \rho \end{aligned}$$

$$PQ = \rho \text{ விற்குச் சமம்} \qquad (9)$$

P யின் நிலைத்தூரம் (ordinate) PN என்க.

N லிருந்து P யில் வரையப்பட்ட தொடு கோட்டிற்கு LN என்னும் செங்குத்து வரைக.

அப்பொழுது, $NL = y \cos\psi = c \sec\psi . \cos\psi = c$

$$\therefore NL = c \qquad (10)$$

$$PL = y \sin\psi = c \sec\psi \sin\psi = c \tan\psi = s$$

$$\therefore PL = s \qquad (11)$$

6. யாதேனு மொரு புள்ளியில் உள்ள இழுவிசை

(i) $T_0 = \omega c \qquad (1)$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழு விசையானது ஆதிக்கும், உச்சிக்கும் இடையேயுள்ள தூரத்திற்குச் சம மான நீளமுள்ள இழையின் எடைக்குச் சமமெனக் காண்கிறோம்.

(ii) $T \cos\psi = T_0$ எனப் பார்த்தோம். (2)

$$= \omega c$$

ஆகவே, ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள இழுவிசையின் கிடைக் கூறு (horizontal component) ஒன்றே என்றும், அது மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி யில் உள்ள இழுவிசை T_0 அல்லது ωc க்குச் சமமெனப் பெறுகிறோம்.

(iii) $T \sin\psi = \omega s$ எனப் பார்த்தோம். (3)

எனவே, ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் உள்ள இழுவிசையின் நிலைக்குத்துக் கூறு (vetical component) உச்சிக்கும், அப்புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள இழைப் பகுதியின் எடைக்குச் சமமெனப் பெறுகிறோம்.

(iv) $\because T \cos\psi = \omega c$

$$T \sin\psi = \omega s$$

$$\therefore T^2 = \omega^2 c^2 + \omega^2 s^2$$

$$= \omega^2 (c^2 + s^2)$$

$$= \omega^2 y^2$$

$$\therefore T = \omega y \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ஆகவே, எப்புள்ளியிலும் உள்ள இழுவிசை அப்புள்ளிக்கும், இயக்கும் வரைக்கும் உள்ள உயரத்திற்குச் சமமான நீளமுள்ள இழையின் எடைக்குச் சமமாகும். இதையே, எப்புள்ளியிலும் உள்ள இழுவிசை அப்புள்ளி இயக்குவரைக்கு மேலுள்ள தூரத்திற்கு நேர் விகிதத்தில் மாறுகிறது என வேறு வகையாகக் கூறலாம்.

7. சங்கியத்திற்குப் பெரிதும் ஒத்திருக்கும் தோற்றம் (approximation to the shape of the catenary)

சங்கிலியத்தின் தெக்கார்டின் சமன்பாடு,

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \text{ ஆகும்.}$$

$$= \frac{c}{2}\left(e^{x/c} + e^{-x/c}\right)$$

$$= \frac{c}{2}\left\{1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \ldots 1 - \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} - \ldots\right\}$$

$$= c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3} + \ldots\ldots \qquad (4)$$

(i) x சிறியதாயிருப்பின், x^4, இன்னும் அதற்கு மேற்பட்ட அடுக்குகளை நாம் புறக்கணிக்கலாம்.

ஆகவே, சமன்பாடு

$$y = c + \frac{x^2}{2c} \text{ என்றுகிறது.} \qquad (1)$$

(அ-து) $x^2 = 2c\,(y - c)$ (2)

இது, ஒரு அதிபர வளைவைக் (parabola) குறிக்கின்றது.

இதன் உச்சி, C யிலும் இதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உள்ளது. இதன் செவ்வகலம் (latus rectum) 2c ஆகவும் உள்ளது.

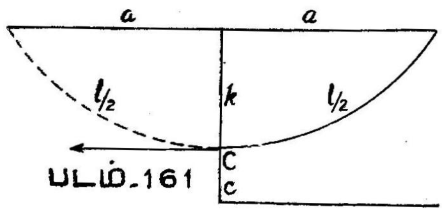
ஆகவே, C யின் அண்மையில், சங்கிலியம் ஏறத்தாழ ஒரு அதிபர வளைவாகிறது.

(ii) c மிகப் பெரிய மதிப்பை அடைந்தாலும், இதே விடையே கிட்டும்.

ஆகவே, ஒரு இழை தளராத வண்ணம் இரு புள்ளிகளுக் கிடையே பற்றி யிழுக்கப்பட்டால், அதன் தோற்றம் ஏறத்தாழ ஒரு பரவளை வாகும்.

8. உதாரணம் 1

l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரே மட்டத்தில் உள்ள இரு புள்ளி களுக்கிடையே உறுதியாகப் பற்றி யிழுக்கப்படும் பொழுது, அதன் நடு வில் ஏற்படும் தொய்வளவு (sag) k ஆகும். சங்கிலியின் நீளம், இரு புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரத்தைவிடத்தோராயமாக $\frac{8k^2}{3l}$ அளவில் மிகைப்படு மெனக் காட்டுக.



படம்-161

இரு புள்ளிகளுக் கிடை யே உள்ள தூரம் 2a எனக் கொள்வோம்.

சங்கிலியத்தின் நிலையான அளபுரு (parameter) c எனக் கொள் வோம்.

எனவே, $k+c= c\cosh\frac{a}{c}$ (1)

$\frac{1}{2}l = c\sinh\frac{a}{c}$ (2)

$\therefore (k+c)^2-\frac{1}{4}l^2=c^2$

(அ-து) $(k+c)^2-c^2=\frac{1}{4}l^2$

$\therefore 2kc=\frac{1}{4}l^2-k^2$

$\therefore c=\frac{l^2}{8k}-\frac{k}{2}$

k சிறியதாய் இருப்பதால், முதலுறுப்புடன் ஒப்புமை செய்ய, இரண்டாவது உறுப்பைப் புறக்கணிக்கலாம்.

$$\therefore c = \frac{l^2}{8k}$$

மேலும், $\frac{a}{c}$ சிறியதாய் இருப்பதால், (2) இல் உள்ள $\sin h \frac{a}{c}$-இன் பிரிவில் முதல் இரண்டு உறுப்புக்களை மட்டுமே வைத்துக் கொண்டு மற்றவைகளைப் புறக்கணிக்கலாம்.

$$\because \tfrac{1}{2} l = c \left(\frac{a}{c} + \frac{a^3}{6c}\right)$$

$$(\text{அல்லது})\ l - 2a = \frac{a^3}{3c^2}$$

இப்பொழுது, $\frac{a^3}{3c^2}$ என்ற உறுப்பில் தோராயமாக $a = \frac{1}{2} l$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$l - 2a = \frac{l^3}{24c^2}$$

இதில், $c = \frac{l^2}{8k}$ எனப் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$l - 2a = \frac{8k^2}{3l}$$

உதாரணம் 2

ஒவ்வொரு இறுதி முனையிலும் உள்ள இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசையைப் போல n மடங்காக இருக்கும் வண்ணம், l நீளமுள்ள ஒரு சீர்ச்சங்கிலி ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளில் A, B என்பனவற்றிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்டிருக்கின்றது. AB யின் கிடைத்தூரம்.

$$\frac{l}{\sqrt{(n^3-1)}} \log[n + \sqrt{n^2-1}]$$ எனக் காட்டுக.

ஒரு சங்கிலியத்தில்

$x = c \log(\tan\psi + \sec\psi)$ என நிறுவி யுள்ளோம்.

ஆகவே, $AB = 2x$

$$= 2c \log(\tan\psi + \sec\psi) \qquad (1)$$

A யிலுள்ள இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசை போல n மடங்காதலால்,

$$T = n\,T_0 \qquad (2)$$

மேலும், எப்புள்ளியிலும் உள்ள இழுவிசையின் கிடைக்கூறு எப்பொழுதும் T_0க்குச் சமம்.

$$\therefore\ T\cos\psi = T_0 \qquad (3)$$

(2) லிருந்து (3) இல் ப்பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$n\,T_0\cos\psi = T_0$$

ஆகவே, $sce\ \psi = n \qquad (4)$

$$\therefore\ \tan^2\psi = \sec^2\psi - 1 = n^2 - 1$$

$$\therefore\ \tan\psi = \sqrt{n^2-1} \qquad (5)$$

அன்றியும், $s = c\tan\psi$

$$\therefore\ \tfrac{1}{2}\,l = c\sqrt{n^2-1} \qquad (6)$$

இதிலிருந்து $2c = \dfrac{l}{\sqrt{n^2-1}}$

முறையே (4), (5), (6) என்ற சமன் பாடுகளில் இருந்து கிடைக்க $\sec\psi$, $\tan\psi$, 2c என்பவற்றின் மதிப்புகளை (1) இல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$AB = \frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log\left[n + \sqrt{n^2-1}\right]$$

வேறு வழி

புள்ளி A (x, y) என்று வைத்துக் கொள்வோம். A யிலுள்ள இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசை n போல மடங்காதலால்,

$$T = n\,T_0$$

$$= nwc \qquad (1)$$

ஆனால், $T = wy = w\,c\cosh\dfrac{x}{c} \qquad (2)$

(1) லிருந்து (2) இல் பிரதியிட

$$nwc = wy = wc\cosh\frac{x}{c}$$

$$\cosh\frac{x}{c}=n$$

$$\frac{x}{c}=\cosh^{-1}n=\log(n+\sqrt{n^2-1})$$

$$\therefore\ x=c\log(n+\sqrt{n^2-1}) \qquad (3)$$

அன்றியும், $y^2=c^2+s^2=c^2+\frac{l^2}{4}$

ஆனல், $y=nc$

$$\therefore\ n^2c^2=c^2+\frac{l^2}{4}$$

$$c^2(n^2-1)=\frac{l^2}{4}$$

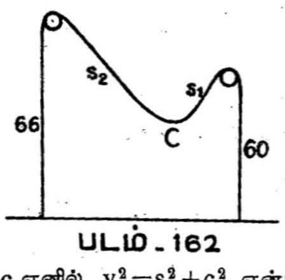
$$c=\frac{l}{2\sqrt{n^2-1}}$$

3இல் பிரதியிட

$$\therefore\ AB=2x=\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\log(n+\sqrt{n^2-1})$$

உதாரணம் 3

180 செ. மீ நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர் இழை யொன்று வெவ்வேறு உயரங்களிலுள்ள இரு மழமழப்பான முளைக்கட்டைகள் மீது தொங்குகிறது. நிலைக்குத்தாகத் தொங்கும் பகுதிகளின் நீளங்கள் 60 செ. மீ; 66 செ. மீ ஆகும். சங்கிலியத்தின் உச்சி, முழு இழை நீளத்தை 4 : 5 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்குமெனக் காட்டு. மேலும், முளைக்கட்டைகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தையும் காண்க.



படம் - 162

சங்கிலியத்தின் உச்சி Cயிலிருந்து இரு முளைக்கட்டைகளுக்கும் வில் வழியே உள்ள தூரங்களை s_1, s_2 எனக் குறிப்பிடுவோம்.

எனவே, $s_1+s_2=180-(66+60)$
$=54 \qquad$ (i)

சங்கிலியத்தின் நிலையான அளபுரு c எனில், $y^2=s^2+c^2$ என்பதால்,

$$s_1^2 + c^2 = 60^2 \qquad (2)$$

$$s_2^2 + c^2 = 66^2 \quad (3)$$ எனப் பெறுகிறோம்.

இவற்றிலிருந்து $s_1 = 20$; $s_2 = 34$; $c = 40\sqrt{2}$ என எளிதாகப் பெறலாம்.

ஆகவே, $\dfrac{s_1 + 60}{s_2 + 66} = \dfrac{20 + 60}{34 + 66} = \dfrac{80}{100} = \dfrac{4}{5}$

மேலும், $y = c \cosh \dfrac{x}{c}$

$$\therefore x = c \log \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

ஆகவே, $y = 60$ அல்லது 66 எனில்,

$x = 20\sqrt{2} \log_e 2$ அல்லது $20\sqrt{2} \log_e \dfrac{25}{8}$ ஆகும்.

$$\therefore x_2 + x_2 = 40\sqrt{2} \log e \, 2{\cdot}5 = 51{\cdot}84$$

எனவே, மூளைக்கட்டைகளுக்கு இடையே உள்ள கிடைத்தூரம் $= 51{\cdot}84$ செ. மீ.

அவைகளுக்கு இடையே உள்ள நிலைக்குத்துத்தூரம் $= 6$ செ. மீ.

ஆகவே, அவைகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்.

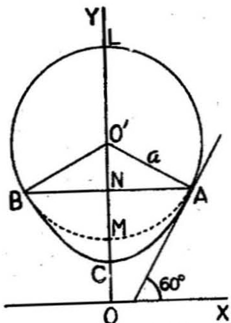
$$= \sqrt{(51{\cdot}84)^2 + 6^2}$$

$$= 52{\cdot}18 \text{ செ. மீ.}$$

உதாரணம் 4

a ஆரை யுடைய வட்ட வடிவமான கப்பி ஒன்றன்மீது, அதன் பரிதியில் மூன்றில் இரண்டு பாகங்களுடன் தொட்டுக் கொண்டு தொங்கக் கூடிய முடிவற்ற சங்கிலியின் நீளம்,

$$a\left[\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})} + \frac{4\pi}{3}\right]$$ எனக் காட்டுக.



படம் - 163

a ஆரையுடைய MLAB என்னும் வட்ட வடிவமான கப்பியின்மீது CALBC என்னும் முடிவற்ற சங்கிலியானது கப்பியின் பரிதியில், மூன்றில் இரண்டு பாகத்தைத் தொட்டுக் கொண்டு தொங்கட்டும்.

சங்கிலியானது கப்பியின் மூன்றில் இரண்டு பங்குடன் பொருந்தியிருப்பதால்,

$$ALB \text{ என்ற பகுதி} = \frac{2}{3}(2\pi a) = \frac{4}{3}\pi a$$

சங்கிலியின், மீதிப் பாகம் ACB ஒரு சங்கிலிய வடிவில் தொங்கும். இதன் மிகத் தாழ்ந்த பாகம் C ஆகும்.

இச்சங்கிலியத்தின் நீளம் CA என்னும் வில்லின் நீளத்தைப் போல் இரு மடங்காகும்.

இப்பொழுது, $\angle AO'B = \frac{1}{3}(2\pi)$

$$\therefore \angle AO'N = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} 2\pi = \frac{1}{3}\pi$$

A யில் உள்ள தொடு கோடு O′A யிற்குச் செங்குத்தாக இருக்கும்.

ஆகவே, அத்தொடு கோடு x அச்சுக்கு 60° சாய்ந்திருக்கும்.

$$NA = a \sin\frac{\pi}{3} = \frac{a.\sqrt{3}}{2}$$

$x = c \log(\tan\psi + \sec\psi)$ என்னும் சூத்திரத்தின்படி, A என்னும் புள்ளியில் நாம் பெறுவது

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = c \log(\tan 60° + \sec 60°)$$

$$(\text{அ-து}) \ \frac{a\sqrt{3}}{2} = c \log(\sqrt{3} + 2)$$

$$\therefore c = \frac{a\sqrt{3}}{2 \log(2 + \sqrt{3})}$$

ஆகவே, வில் CA யின் நீளம் $= c \tan\psi$

$$= \frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2\log(2+\sqrt{3})} = \frac{3a}{2\log(2+\sqrt{3})}$$

$\therefore$ ACB என்ற சங்கிலியத்தின் நீளம் $= \frac{2\times 3a}{2\log(2+\sqrt{3})}$

$$= \frac{3a}{\log(2+\sqrt{3})}$$

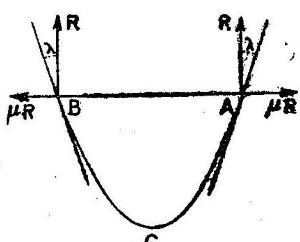
$\therefore$ சங்கிலியின் முழு நீளம் $= a\left\{\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})} + \frac{4\pi}{3}\right\}$

உதாரணம் 5

ஒரு சீரான சங்கிலியின் முனை வளையங்கள், ஒரு நிலையான உராய்வுடைய கிடைக் கோலின் மீது வழுக்கக்கூடியவை, உராய்வுக் கெழு μ எனில், அச்சங்கிலியின் மீப்பெரு வளைவு விட்டத்திற்கும், (span) அச் சங்கிலியின் நீளத்திற்கும் உள்ள விகிதம்,

$$\mu \log \frac{1+\sqrt{(1+\mu^2)}}{\mu}$$ எனக் காட்டுக.

AB என்பது மீப்பெரு வளைவு விட்டமாகட்டும். இந்நிலையில் A, B என்னும் முனை வளையங்கள் எல்லைச் சமநிலையில் இருக்கின்றன. Aயில் உள்ள எதிர்த் தாக்கம் R எனில், Aயில் உள்ள உராய்வு விசை μR ஆகும். R, μR என்ற விசைகளின் விளைவு Rஇன் திசையுடன் (அ-து) நிலைக் குத்துடன் λ என்னும் கோணச் சாய்வில் செயல்படும்.



படம் -164

Aயின் சமநிலைக்கு, இவ்விளைவெதிர்த் தாக்கமும், Aயில் உள்ள இழுவிசையும் சமனு மெதிருமா யிருக்கவேண்டும்.

ஆகவே, Aயில் உள்ள இழுவிசை நிலைக்குத்துடன் λ என்னும் கோணச் சாய்வில் மேற்கூறிய விளைவெதிர்த் தாக்கத்திற்கு நேரெதிராகச் செயல்படவேண்டும். Aயில் உள்ள இழுவிசை கிடைக் கோட்டுடன் $90° - \lambda$ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்கும். இப்பொழுது, சங்கிலியின் நீளம் $= 2s = 2c \tan\psi = 2c \tan(90 - \lambda)$.

$$=2c \cot \lambda = \frac{2c}{\mu}$$

மீப்பெரு வளைவு விட்டம் AB $=2x$

$$=2c \log (\tan \psi + \sec \psi)$$

$$=2c \log [\tan (90-\lambda) + \sec (90-\lambda)]$$

$$=2c \log [\cot \lambda + \operatorname{cosec} \lambda]$$

$$=2c \log \left[\frac{1}{\mu} + \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} \right]$$

$$=2c \log \left[\frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} \right]$$

∴ தேவையான விகிதம் $= \frac{2x}{2s}$

$$= \frac{2c \log \left\{ \frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} \right\}}{\frac{2c}{\mu}}$$

$$= \mu \log \left\{ \frac{1+\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} \right\}$$

பயிற்சி 11·1

ஒரு சங்கிலியத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி P யில் உள்ள இழுவிசை T ஆகும். அச்சங்கிலியத்தின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி A யில் உள்ள இழுவிசை T_0 ஆகும். சங்கிலியத்தின் AP என்ற வில்லின் எடை W ஆனல்,

$T^2 - T_0{}^2 = W^2$ எனக் காட்டுக.

2. l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள A, B என்னும் இரு புள்ளிகளில் இருந்து தொங்கவிடப் படுகின்றது. A யில் உள்ள இழுவிசை மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசை போல் இருமடங்காயின்,

வளைவு விட்டம் AB $= \frac{l}{\sqrt{3}} \log (2+\sqrt{3})$ எனக் காட்டுக.

3. $2\,l$ அடி நீளமுள்ள ஒரு கயிறு ஒரே கிடை மட்டத்தில் உள்ள இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. கயிற்றின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி தொங்கவிடப்படும் புள்ளிகளின் மட்டத்தின் கீழ் b அடி தாழ்ந்திருக்கிறது. ஒரு நீளக் கயிற்றின் எடை ω ஆனால், இழுவிசையின் கிடைக் கூறு $\frac{\omega}{2b}(l^2-b^2)$ எனக் காட்டுக.

4. தன் எடையைப் போல n மடங்கு இழுவிசையைத் தாங்கக் கூடிய l நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி, ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளுக்கிடையே பற்றி இழுக்கப்பட்டுத் தொங்குகிறது. நடுவில் உள்ள மிகக் குறைந்த தொய்வளவு $l\,\{n-\sqrt{(n^2-\frac{1}{4})}\}$ எனக் காட்டுக.

5. A என்ற புள்ளி B யை விட h அடி உயரத்தில் இருக்க, ஒரு சீரான சங்கிலி இவ்விரு புள்ளிகளிலுமிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. A, B என்ற புள்ளிகளில், கிடைக் கோட்டிற்குச் சங்கிலியின் சாய்வுகள் முறையே ψ_1, ψ_2 என்பனவாகும். சங்கிலியின் முழு நீளம் $h\cos\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\,\mathrm{cosec}\,\frac{\psi_1-\psi_2}{2}$ அடி என்று காட்டுக.

6. $2\,l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலியின் முனைகள் ஒரே கிடைக் கோட்டில் ஒன்றுக்கொன்று 2a தூரத்தில் விலகியுள்ள இரு புள்ளிகளுக்குக் கட்டப்பட்டிருக்கின்றன. l என்பது a யை விடச் சற்றே பெரியதாயின், சங்கிலியின் இழுவிசையானது $\sqrt{\frac{a^3}{6(l-a)}}$ நீளமுள்ள சங்கிலியின் எடைக்குத் தோராயமாகச் சமமென்றுகாட்டுக. மேலும், இரு முனைகளுக்குக் கீழே மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியின் தொய்வளவு (sag) சற்றேறக் குறைய $\frac{1}{2}\sqrt{6a\,(l-a)}$ என்பதற்குச் சமமெனக் காட்டுக.

7. 40 மீட்டர் நீளமுள்ள ஒரு சீரான கம்பிக்கு வளைவு விட்டம் 39·9 மீட்டர் எனில், அக்கம்பியின் நடுவில் தொய்வளவைக் (sag) காண்க.

8. தன் அடி நீளத்தின் எடை $\frac{1}{20}$ இருத்தலாக உடைய ஒரு கம்பி, 1 அடி தொய்வ்ளவுடனும், கிடை வளைவு விட்டம் 100 அடியாகவும் இருக்கும் வண்ணம் தொங்குகிறது. அதன் மீப்பெரு இழுவிசை தோராயமாக $62\frac{1}{2}$ இரு. எடை எனக் காண்பி.

9. 155 அடி நீளமுள்ள ஒரு பாரமான சீர்ச் சங்கிலி யொன்று ஒரே கிடைக் கோட்டில் 150 அடி அப்பாற்பட்ட இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்படுகிறது. மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழுவிசை சங்கிலியின் எடையைப் போல 1·08 மடங்காகும் எனக் காட்டுக.

10. a அடி அப்பாற்பட்ட இரு கம்பங்களுக்கிடையே நீட்டப் பட்ட தந்திக் கம்பி நடுவில் n அடி தொய்வு கொண்டுள்ளது, கம்பியின் ஓர் அலகு நீளத்தின் எடை ω எனில், அக்கம்பியின் முனைகளில் உள்ள

இழுவிசை தோராயமாக $\omega\left(\frac{a^2}{8n}+\frac{7}{6}\ n\right)$ எனக் காட்டுக.

11, ஒரே மட்டத்தில் 2a தூரத்திற்கு அப்பாற்பட்ட இரு புள்ளி களிலிந்து ஒரு சீரான சங்கிலி தொங்கவிடப்படுகிறது. அதன் நடுவில் தொய்வளவு z எனில்,

$$z=c(\cosh\ \frac{a}{c}-1)$$ எனக் காட்டுக.

a உடன் ஒப்புமையிட, z சிறியதாயின், $2cz=a^2$ என்பது தோராய மாகச் சமமெனக் காட்டுக.

12. 40 கஜ தூரத்திற்கு அப்பாற்பட்ட இரு கம்பங்களால் ஒரு தந்திக் கம்பி தாங்கப்படுகிறது. ஒரு அடி நீளக் கம்பியின் எடை $\frac{1}{2}$ அவுன்சு ஆகவும், தொய்வளவு 1 அடி ஆகவும் இருந்தால், ஒவ்வொரு கம்பத்திலும் உள்ள கிடை இழுவிசை சற்றேறக் குறைய 56 இரு. எடைக்குச் சமமெனக் காட்டுக.

13. ஒரு பெட்டிக் காற்றாடி (Box kite), l நீள முள்ள கம்பி விடப்பட்டபின், உயரம் h இல் பறக்கின்றது. கம்பி அமைவுறும் சங்கிலியத்தின் உச்சி தரையில் இருக்கின்றது; ஓர் அலகு நீளக் கம்பியின் எடை ω எனில், பட்டத்தினிடத்தும், தரையிலும் உள்ள இழுவிசைகள்

முறையே $\omega\frac{l^2+h^2}{2h}$, $\omega\ \frac{l^2-h^2}{2h}$ என்பனவாகு மெனக் காட்டுக.

மேலும், பட்டத்தினிடத்துக் கம்பியானது தரைக்கு $2\tan^{-1}\frac{h}{l}$ என்னும் கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கின்ற தெனக் காட்டுக,

14. 2 a தூரத்திற்கு அப்பாற்பட்டு, ஒரே கிடை மட்டத்திலுள்ள இரு மழமழப்பான முளைக் கட்டைகளின்மீது $2l$ நீளமுள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி தொங்குகின்றது. நடுவில் உள்ள தொய்வளவு h எனில், நிலைக் குத்தாகத் தொங்கும் ஒவ்வொரு பகுதியின் நீளமும் $h+l-\sqrt{(2hl)}$ஆகு மெனக் காண்பி.

15. ஒரே கிடைக் கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகளுக் கிடையே l நீள முள்ள ஒரு சீரான சங்கிலி சற்றேறக்குறைய கிடையாக இருக்கும் வண்ணம் உறுதியாக நீட்டப்படுகிறது. ஓர் அலகு நீளமுள்ள சங்கிலி யின் எடை ω ஆகவும், சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழு விசை T_0 ஆகவும் இருந்தால், சங்கிலியின் நீளம் வளைவு வட்டத்தை

விடச் சற்றேறக் குறைய $\frac{\omega^2 l^3}{24 T_0^2}$ அளவு மிகைபடு மெனக் காட்டுக.

16. $2a(1+k)$ நீளமுள்ளதும், எளிதாக வளைக்கக் கூடியதுமான ஒரு சீரான சங்கிலியின் முனைகள் ஒரே கிடை மட்டத்தில் 2a தூரத்திற் கப்பாற்பட்ட இரு புள்ளிகளுக்கு இணைக்கப்பட்டுள்ளன. k யின் இரண்டாவது அடுக்குக்கு மேற்பட்டவைகளைப் புறக்கணிக்கக்கூடிய வையாய் kயின் மதிப்பு அவ்வளவு சிறியதாய் இருப்பின், சங்கிலியின் தொய்

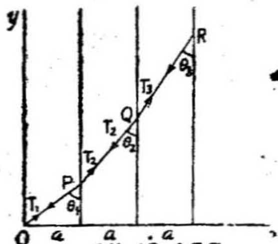
வளவு $\frac{a\sqrt{6k}}{2}\left(1+\frac{7k}{20}\right)$ ஆகு மெனக் காட்டுக.

17. W என்ற ஒரு எடை ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து l நீளமுள்ளதும், ஓர் அலகு நீளத்தின் எடை ω ஆக உள்ளதுமான ஒரு சீரான இழை யினால் தொங்கவிடப்படுகின்றது. அது ஒரு கிடை விசை Pயினால் தாக் கப்பட்டு ஒரு பக்கமாக இழுக்கப்படுகிறது. சமநிலை எய்தும் நிலையில் நிலையான புள்ளிவழி வரையும் நிலைக்குத்திலிருந்து W வினுடைய தூரம்

$\frac{P}{\omega}\left\{\sin^{-1}h\left(\frac{W+l\omega}{P}\right)-\sinh^{-1}\left(\frac{W}{P}\right)\right\}$ எனக்காட்டுக.

9 பரவளைவுச் சங்கிலி (Parabolic chain)

இரு நிலையான புள்ளிகளுக்கிடையே தொங்கும் ஓர் இலேசான இழையின் மீது பிரிப்பீடு செய்யப்பட்ட சம எடையுடைய துகள்கள் அவற்றுள், ஒவ்வொரு சோடி அடுத்தடுத்த துகள்களுக்கு இடையே யுள்ள கிடைத் தூரம் ஒரே சமமாக இருக்கும் வண்ணம் இணைக்கப் பட்டால், அத்துகள்கள் தன் அச்சு நிலைக்குத்தாக உள்ள ஒரு பர வளையத்தின் மேல் அமையும்.



படம்-165

O, P, Q, R என்பன நான்கு துகள் களைக் குறிக்கட்டும். O வை ஆதியாகவும், O வழியாக வரையப்பட்ட கிடை, நிலைக் கோடுகளை x, y அச்சுகளாகவும் கொள்க.

ஒவ்வொரு சோடி அடுத்தடுத்துள்ள துகள்களுக்கு இடையேயுள்ள கிடைத் தூரத்தை a எனக் கொள்வோம்.

P, Q, R என்பனவற்றின் நிலைத் தூரங்களை முறையே y_1, y_2, y_3 என்றும், OP, PQ, QR என்பன நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் சாய்வுகளை $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ என்றும் குறிப் போம், OP, PQ, QR என்ற பகுதிகளில் உள்ள இழுவிசைகள் T_1, T_2, T_3 என்பனவாகுக.

ஒவ்வொரு துகளையும் ஒன்றன்பின் ஒன்ருக எடுத்து அவைகளின் சமநிலையைக் கருதி, கிடையாகவும், நிலைக்குத்தாகவும் விசைகளைப் பிரிக்க, நாம்பெறுவன

$$T_1 \sin\theta_1 = T_2 \sin\theta_2 = T_3 \sin\theta_3 = \ldots = \ldots\ldots :$$

$=$ இழுவிசையின் கிடைக் கூறு $= T$ என்க (1)

$$\left.\begin{array}{l} T_2 \cos\theta_2 - T_1 \cos\theta_1 = \omega \\ T_3 \cos\theta_3 - T_2 \cos\theta_2 = \omega \\ T_4 \cos\theta_4 - T_3 \cos\theta_3 = \omega \end{array}\right\} \quad (2)$$

(2) இல் உள்ள சமன்பாடுகளைக் கிடை இழுவிசையால் வகுக்க, நாம் பெறுவன

$$\cot\theta_2 - \cot\theta_1 = \frac{\omega}{T}$$

$$\cot\theta_3 - \cot\theta_2 = \frac{\omega}{T}$$

$$\therefore \cot\theta_3 - \cot\theta_2 = \cot\theta_2 - \cot\theta_1$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{y_3 - y_2}{a} - \frac{y_2 - y_1}{a} = \frac{y_2 - y_1}{a} - \frac{y_1}{a}$$

$$\therefore y_3 = 3(y_2 - y_1) \quad (3)$$

இப்பொழுது, தன் அச்சு நிலைக்குத்தாக இருக்கும் ஒரு பரவளையம், யாதேனும் மூன்று குறிப்பிட்ட புள்ளிகள், வழிச் செல்லும்படி வரையலாம். (உதாரணமாக, O, P, Q)

$$\text{ஏனெனில், } y = Ax^2 + Bx \qquad (4)$$

என்னும் சமன்பாடு தன் அச்சு நிலைக்குத்தாக உள்ள ஆதி வழியாகச் செல்லும் பரவளையத்தைக் குறிக்கின்றது. மேலும், இரண்டு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்படி A, Bயின் மதிப்புகளை நாம் பெறலாம்,

P, Q, R என்பனவற்றின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (a, y_1); $(2a, y_2)$; $(3a, y_3)$ என்பனவாகும்.

(4) இல் உள்ள வளைவு P, Q என்ற புள்ளிவழிச் செல்ல,

$$y_1 = Aa^2 + B\,a$$

$$y_2 = 4\,Aa^2 + 2\,B\,a$$ என்பன உண்மையாக வேண்டும்.

ஆகவே, இவற்றிலிருந்து A, Bக்களின் மதிப்பைப் பெறலாம்.

இப்பொழுது, இதே வளைவு R வழிச் செல்ல,

$y_3 = 9\,Aa^2 + 3B\,a$ உண்மையாக வேண்டும்.

(3) லிருந்து $y_3 = 3\,(y_2 - y_1)$ என்பதனால்

$$y_3 = 3\,[\,(4Aa^2 + 2B\,a) - (Aa^2 + B\,a)\,]$$

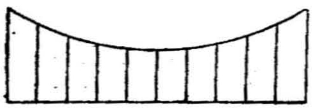
$= 9\,Aa^2 + 3B\,a$ என்பது உண்மையாகக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, O, P, Q வழிச் செல்லும் அதே பரவளைவு R வழிச் செல்கின்றது. இதே போல் இழையில் உள்ள மற்றைய புள்ளிகள் வழியும் அப்பரவளைவு செல்லும்.

10 தொங்கும் பாலங்கள். (Suspension Bridges)

துகள்களுக்கு இடையே உள்ள தூரங்கள் எல்லையில் அளவுக்குக் குறைக்கப்பட்டால்,ஒரு தொடர்ச்சியான நெருக்கமாக வுள்ள பாரத்தை அதன் கிடைப் பிரிப்பீடு சீராக இருக்கும் வண்ணம், தாங்கும் ஒரு இலேசான இழை அல்லது சங்கிலி என்னும் வகையை அடைகிறோம். இதுவே தொங்கும் பாலம் வகையாகும்.

11 ஒரு தொடர்ச்சியான நெருக்கமாக உள்ள பாரத்தை, அதன் கிடைப் பிரிப்பீடு சீராக இருக்கும் வண்ணம் தாங்கும் சங்கிலி ஒரு பரவளவு (parabolic) உருவத்தை மேற் கொள்ளும் என்பதை எளிதில் பின் வருமாறு காணலாம் :

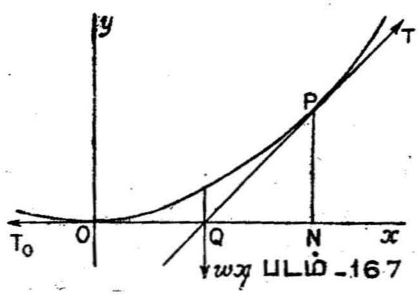


படம் . 166

சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியை O எனக் குறிப்போம். O வழியாக ox, oy என்னும் கிடை நிலைக்குத்து அச்சுகளை வரைக. சங்கிலியில் உள்ள P என்னும் யாதேனு மொரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்(x, y) ஆகுக.

OP யினால் தாங்கப்படும் எடை ON க்கு விகிதசமமானது. ஆகவே, அதை ωx எனக் குறிப்பிடலாம்.

பாரமானது சீராகக் கிடையாகப் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ளதால், இவ்விசை ON இன் மையப் புள்ளி Q வழிச் செயல்படும்.



படம் -167

சங்கிலியின் OP என்ற பகுதி அதன் முனைகளில் உள்ள இழுவிசைகளினாலும் தாக்கப்படுகின்றது. Oவிலுள்ள இழுவிசையை T_0 என்றும், P யில் உள்ள இழு விசையை T என்றும் குறிப்போம்.

இம்மூன்று விசைகளும் Q வில் சந்திக்கவேண்டும், ஆகவே PNQ என்பது விசைமுக்கோணமாகும்.

$$\therefore \frac{\omega x}{PN} = \frac{T_0}{NQ}$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{\omega x}{y} = \frac{T_0}{\frac{1}{2}x}$$

$$\therefore T_0 y = \tfrac{1}{2}\omega x^2$$

$$\therefore\ y = \frac{\omega}{2T_0}\ x^2$$

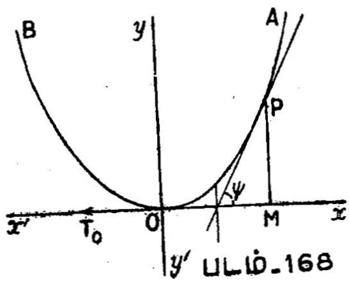
இது ஒரு பரவளைவாகும்.

மேற் கூறிய தேற்றத்தை வேறுவகையாகவும் நிரூபிக்கலாம்.

தேற்றம்

ஒரு சங்கிலி, தன் ஒவ்வொரு பகுதியின் எடையும் அதன் கிடை வீச்சுப் பகுதிக்கு விகிதசமமாக இருக்கும் வண்ணம் பாரம் கொண்டு, புவி ஈர்ப்புக் காரணமாகத் தொங்கும்பொழுது அது ஒரு பரவளைவு வடிவத்தை மேற்கொள்ளும்.

A, B என்ற புள்ளிகளிலிருந்து சங்கிலி தொங்கட்டும்.



படம்-168

O என்பது சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியைக் குறிக்கட்டும். சங்கிலியின் கிடை வீச்சின் ஓர் அலகு நீளத்தின் எடையை wஎனக் கொள் வோம்.

OM என்பது வில் OPயின் கிடை வீச்சானால், வில் தாங்கும் பாரத்தின் எடை ω. OM ஆகும்.

இந்த எடை நிலைக்குத்தாக OM இன் மையப் புள்ளி வழியாக நேர் கீழாகச் செயல்படும்.

O, Pஎன்ற புள்ளிகளில் உள்ள தொடு கோடுகள் வழிச் செயல்படும் இப்புள்ளிகளில் உள்ள இழுவிசைகள் OPயைத் தாக்கும் மற்றைய விசைகளாகும்.

O, P யில் உள்ள இழுவிசைகளை முறையே T_0, T எனக் குறிப்பிடு வோம்.

Pயில் உள்ள தொடு கோடு கிடைக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணம் ψ எனில், விசைகளைக் கிடையாயும் நிலைக்குத்தாயும் பிரிக்க, நாம் பெறுவன

$$T\cos\psi = T_0 \qquad (1)$$

$$T\sin\psi = \omega.\ OM \qquad (2)$$

o வழியாக வரையும் கிடைக் கோட்டை x அச்சாகவும், அதன் வழி வரையும் நிலைக்குத்துக் கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க.

P என்ற புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) ஆகுக.

அப்பொழுது, $T \sin \psi = \omega . x$ (3)

(3) ஐ (1) ஆல் வகுக்க, நாம் பெறுவது

$$\tan \psi = \frac{\omega x}{T_0}$$

கிடைக் கோட்டில் c நீளமுள்ள பகுதியின் எடைக்குச் சமமாக T_0 இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad T_0 = \omega c.$$

$$\therefore \quad \tan \psi = \frac{\omega x}{\omega . c}$$

(அ-து) $c \tan \psi = x$

(அ-து) $c \dfrac{dy}{dx} = x$

$$\therefore \; cdy = xdx$$

இதைத் தொகையீடு காண, நாம் பெறுவது

$$cy = \frac{x^2}{2} + K$$

இப்பொழுது, $x = o$ ஆனால், $y = o$

$$\therefore \; K = O$$

ஆகவே, வளையின் சமன்பாடு $x^2 = 2cy$ என்றாகும்.

இது, y அச்சைத் தன் அச்சாகக் கொண்டு, x அச்சை உச்சியிலுள்ள தொடு கோடாகக் கொள்ளும் ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

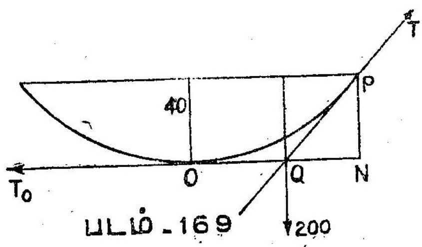
அன்றியும், (1),(3) இவற்றை வர்க்கம் கண்டு கூட்ட நாம் பெறுவது

$$T^2 = \omega^2 x^2 + T_0{}^2 = \omega^2 x^2 + \omega^2 c^2 = \omega^2 (2cy + c^2)$$

$$\therefore \quad T = \omega \sqrt{(2cy + y^2)}$$

12. உதாரணம்

400 அடி வளைவு விட்டமும், 40 அடி தொய்வளவும் கொண்ட ஒரு தொங்கற் பாலத்தில், இரு சங்கிலிகளால் தாங்கப்பட்ட முழு எடையும், ஒவ்வொரு கிடை அடிக்கும். 2 டன் ஆகும். சங்கிலிகளிலுள்ள கிடை இழுவிசையையும், தாங்கற் புள்ளியில் உள்ள இழுவிசையையும் காண்க.



படம்-169

ஒவ்வொன்றும் பாதிப்பாரத்தை ஏற்றுக்கொள்ளும் இரு இணையான சங்கிலிகள் இருக்கின்றன.

இரு சங்கிலிகளில் ஒன்றன் பாதியை OP குறித்தால், அது தாங்கும் 200 டன் ஆகும்.

QN=100; PN=40. ஆகவே, $PQ=10\sqrt{116}=107{\cdot}7$
விசை முக்கோணத்தின்படி

$$\frac{T_0}{NQ}=\frac{T}{QP}=\frac{200}{PN}$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{T_0}{100}=\frac{T}{107{\cdot}7}=\frac{200}{40}=5$$

$\therefore\ T_0=500$ டன் எடை; $T=538{\cdot}5$ டன் எடையாகும்

வேறுவழி

சங்கிலியின் சமன்பாடு $x^2=2cy$.

P யின் ஆயத் தொலைகள் (200, 40)

$\therefore\ 200^2=2.c.\,40$

$\therefore\ c=500$

தாங்கற் புள்ளியில் இழுவிசை$=\omega\sqrt{2cy+c^2}$

$=2\sqrt{2\times 500\times 40+500^2}$

$=200\sqrt{29}$

$=200\times 5\cdot 385$

∴ தாங்கற் புள்ளியில் ஒரு சங்கிலி முனையில்

இழுவிசை $=\frac{1}{2}\times 200\times 5\cdot 385$

$=538.5$ டன் எடை

மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் இழுவிசை

$=\omega.c$

$=2\times 500$ டன் எடை

ஆகவே, மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் ஒரு சங்கிலியில் உள்ள இழுவிசை

$=500$ டன் எடை.

பயிற்சி 11.2

1. 160 டன் எடையுள்ள ஒரு தொங்கற் பாலத்தில் அதன் எடையானது 120 அடி வளைவு விட்டத்தின் மீது சமமாகப் பிரிப்பீடு செய்யப் பட்டுள்ளது. தாங்கும் புள்ளிகளிலிருந்து மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி 16 அடி ஆழத்தில் இருக்கிற தென்றால், தாங்கும் புள்ளி யொன்றில் இழுவிசை 170 டன் எடை எனக் காட்டுக.

2. 200 டன் எடையுள்ள ஒரு தொங்கற் பாலத்தின் முழு எடையும், 150 அடி நீளமுள்ள அதன் கிடைவளைவு விட்டத்தின் மீது சமமாகப் பிரிப்பீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. அதன் உயரம் 20 அடி. மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியிலும், தாங்கும் புள்ளியிலும் இழுவிசை முறையே $187\frac{1}{2}$ டன் எடை, $212\frac{1}{2}$ டன் எடை எனக் காட்டுக.

3. 30 அடி வளைவு விட்டமும், 10 அடி தொய்வளவும் கொண்ட ஒரு தொங்கற் பாலத்தில் அதன் எடையானது, 1 அடி வளைவு விட்ட நீளத்திற்கு $\frac{1}{2}$ டன் எடை என்ற வீதத்தில் சமமாகப் பிரிப்பீடு செய்யப் பட்டிருந்தால், சங்கிலியின் முனைகளிலுள்ள இழுவிசைகள் ஒவ்வொன்றும் $9\cdot 375$ டன் எடையாகு மெனக் காட்டுக.

4. ஒரு தொங்கற் பாலத்தின் வளைவு விட்டம் 100 அடி. அதன் நடுவில் உள்ள தொய்வளவு 10 அடி. ஒவ்வொரு சங்கிலியிலுமுள்ள

மொத்த பாரம் 25 டன் எடை எனில், சங்கிலியின் மிகப் பெரில் இழு விசை 33·62 டன் எடை என்றும், மிகத் தாழ்ந்த புள்ளியில் உள்ள இழு விசை 31·25 டன் எடை என்றும் காட்டுக.

5. A, B என்ற இரு புள்ளிகளிலிருந்து தொங்கவிடப்பட்ட, ஒரு பாரமான சங்கிலியின் மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி O ஆகும். O வழியாக வரைந்த கிடை, நிலைக்குத்துக் கோடுகளை அச்சுகளாகக் கொண்டால், A,B யின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (6, 18); (—4, 8) என்பனவாகும். சங்கிலியின் ஒவ்வொரு கூறின்எடையும், அதன் கிடைவீச்சின் நீளத்தைப் போல் மாற்றினல், அச்சங்கிலி ஒரு பரவளைவு வடிவத்தில் தொங்கு மெனக் காட்டுக. சங்கிலியின் முழு எடை 50 கிலோ கிராம் எனில், சங்கிலியின் முனைகளிலுள்ள இழுவிசைகளையும், மீச்சிறு இழுவிசைகளை யும் காண்க.

விடைகள்

பயிற்சி 2·1

(1) 4, 8, 12 இரு. எடைகள். (2) 14 இரு. எடை. (3) 6 அடி 5 அங்; 2 அடி 4 அங்.

பயிற்சி 2·2

(1) 19 இரு. எடை; 5 இரு. எடை.

(2) தரப்பட்ட இரு விசைகளின் விளைவினது திசையில்.

(3) (i) 13 (ii) $\sqrt{61}$ (iii) 25 (iv) 205 (v) $3\sqrt{3}$ (vi) 60°
(vii) 15 அல்லது $\sqrt{505}$ (viii) 3 (ix) 2 (x) 20.

(4) P இரு. எடை; முதலாவது விசைக்குச் செங்கோணத்தில். (5) 40. (6) $\cos^{-1}(-\frac{1}{4})$ (அ-து) 104°29′. (7) 60° (8) 3 இரு. எடை; 1 இரு. எடை (9) (i) 120° (ii) $\cos^{-1}(-\frac{7}{8})$ (அ-து) 151°3′.

(10) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\frac{P^2+Q^2}{P^2-Q^2}\right)$ (11) 5, 13. (14) 9 இரு. எடை. (16) 20. இரு. எடை (18) $P_1=12$; $P_2=5$ (23) 120 இரு. எடை (24) 1·34 அங். (25) W; $W\sqrt{2}$ (26) 2F. (27) 5. இரு. எடை. (28) $\frac{P}{4}$ $(\sqrt{5}+1)$ $(\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. (29) 10. இரு. எடை. (30) $F\times5{\cdot}027$

பயிற்சி 2·3

(1) 50, இரு. எடை (2) $(2-\sqrt{3})$ P; $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{2}$ P. (3) $\sqrt{3}$F and 2F (4) $\sqrt{2}$F; 1 35°. (5) நிலைக்குத்தோடு $\tan^{-1}\frac{1}{2}$ என்னுங் கோணத்தில், $10\sqrt{5}$ (6) 5:4 (7) $15\sqrt{3}$, 15.

பயிற்சி 2·4

(4) (i) வேண்டிய புள்ளி மூலை விட்டங்களுடைய மையங்களைச் சேர்க்குங் கோட்டை இரு சமக்கூறிடும். (II) $\frac{4}{9}$ AB; $\frac{2}{9}$ CB; $\frac{1}{9}$ CA

பயிற்சி 2·5

(1) $\sqrt{3}$: 1 : 2 (2) 120° (4) 90°, 112° 37′, 157° 23′ (10) $\sqrt{3}$ இரு; $2\sqrt{3}$ இரு. (11) $\frac{W}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$;$W(\sqrt{3}-1)$. (12)$10\frac{5}{6}$ இரு; $4\frac{1}{6}$ இரு. (13) $W\sqrt{3}$. (14) நிறைகள் சமன். (15) $4\frac{1}{5}$; $14\frac{2}{5}$

(16) T=R=W. (19) B வழியாக, AC க்கு இணையாக CD யை L என்னும் புள்ளியில் சந்திக்கும்படி BL என்பதை வரை. DL என்பதை X இல் இரு சமக்கூறிடுக. விளைவு X வழியாக AD க்கு இணையாகவும், AD யின் இரு மடங்காயுமுள்ள ஒரு விசை. 17 T=2W cos θ; R=W 18W= 38.2 இரு. எடை. AB யின் இழு விசை 38. 1 இரு; BC யின் இழு விசை 22 இரு. எடை; CD யின் இழுவிசை 38. 2 இரு எடை.

பயிற்சி 2·6

(1) R=5; tan $\theta=\frac{3}{4}$ (2) oB திசையில் 4 இரு. எடை (3) 14.24 இரு. எடை (4) 7P; மூன்றும் விசையோடு $\cos^{-1}\frac{11}{14}$ (அ-து) 38° 13′

(5) 6·9 இரு. எடை; முதலாவது விசையுடன் 107° 16′ (6) 1.632P. θ=22°19′ (ox′ உடன்) (7) AB யுடன் $\tan^{-1}$ (அ-து)78°41′; 12·31 (8) முதலாம் விசையோடு $\tan^{-1} -\frac{64+19\sqrt{3}}{23}$ என்னுங் கோணத்தில் $\sqrt{125+68\sqrt{3}}$ இரு. எடை (அ-து) 76°39′ இல் 15.58 இரு. எடை. (9) 23.94 இரு. எடை; θ=98°. 4′ (10) 57·25 இரு. எடை 47°41′ கிழக்கிற்குத் தெற்கு (11) மூன்றும் விசையோடு 30° இல் $\sqrt{3}$P அளவுடையது (12) ABயோடு $\tan^{-1}\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$ என்னுங் கோணத்தில், $\sqrt{351}$AB.

பயிற்சி 3

(1) $\frac{W}{2}\sec\frac{C}{2}$ (3) 15 இரு. எடை; 3 இரு. எடை (4) T=500/7 இரு எடை; F=100/7 இரு. எடை. (5) $T=W(\sqrt{3}-1)$; $P=W(2-\sqrt{3})$ (8) நிலைக்குத்திற்கு BC யின் சாய்வு 60°; AB, BC, CD என்னும் பகுதிகளுடைய இழுவிசைகளானவை முறையே $W\sqrt{3}$, W, W என்பனவாகும். (10) 3: 4: 2P.

பயிற்சி 4

(1) 50 இரு. எடை; 30 இரு. எடை; ஒத்த விசைகளாயின், விளைவு பெரிய விசையிலிருந்து $3\frac{3}{4}$ அடியில் தாக்குகிறது; எதிர் விசைகளாயின், விளைவு பெரிய விசையிலிருந்து 15′ தூரத்தில் விசைகளுக்கு வெளியே செயல்படுகிறது.

(2) $2\frac{1}{2}$ இரு. எடை; $3\frac{1}{2}$ இரு. எடை; 5′ 6. 20 இரு; 4 அங்; 8. அங் (9) 77·55 இரு. எடை; 34·45 இரு. எடை.

பயிற்சி 5

(1) 10 அலகுகள் (2) $5\sqrt{3}$ அடி இரு (3)75 $\sqrt{3}$ இரு. எடை (5)வேண்டிய உயரம் அக்கயிற்றின் நீளத்தின் $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ மடங்கு. (7) அவ்விசைகளுக்கு இடையேயுள்ள புறக் கோணத்தை, தம் சைன்களுடைய நேர் மாறு விகிதம், விசைகளின் விகிதத்திற்குச் சமமாயுள்ள இரு கோணங்களாகப் பிரிக்கும் ஒரு நேர்கோடு. (9). $3\frac{1}{2}$ இரு. எடை; அப்புள்ளி 5 இரு. எடையிலிருந்து $8\frac{1}{2}''$(10)28 இரு. எடை (11) $14\frac{3}{8}$ அங்10 $\frac{5}{8}$ அங். (14) 40 இரு. எடை; 35 இரு. எடை (15) W=p+q (16) 20 இரு; 4அங்; 8அங்,(20) 13 இரு;17இரு. (21) 96, 96, 46 இரு. எடைகள்(22) $2\sqrt{2}P$; தாக்கக்கோடு RQ; $DR=\frac{3a}{2}$; $DQ=\frac{3a}{2}$ (Q,AD யிலும், R, CD யிலும் உள்ளன. (23) CAயிற்கு இணையாய் $AP=\frac{9}{2}$ AD ஆகும்படி ADயை Pயில் வெட்டுகின்ற $2\sqrt{2}$ இரு. எடை (24) விளைவு AC யிற்கு இணையாய் AP$-\frac{2}{5}$ அடி ஆகும்படி, AD யை P யில் வெட்டுகின்ற $5\sqrt{2}$ இரு. எடை, (25) Aயில் இருந்து முறையே 8அடி, 16 அடி என்னுந் தூரமான புள்ளிகளில் AB, AD என்பனவற்றை வெட்டும் 20 $\sqrt{5}$ இரு. எடை. (26) BCயிற்குச் செங்குத்தாய் அதனை $BQ=\frac{3}{2}BC$ ஆகவுள்ள Q என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகின்ற $P\sqrt{3}$,

பயிற்சி 6

(1) $8(6+4\sqrt{3})$ (2) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ P.a (3) DCயில் Dயிலிருந்து 2 செ.மீ. தூரமுள்ள E என்னும் புள்ளியில்; AD, BCக்கு இணையாகத் செயல்படும் 4P கிராம் எடையுள்ள விசை (4) 12 அடி இரு. எடை (6) $CC'=\frac{1}{2}AB$ ஆக ACயில்உள்ள C′என்னும் புள்ளியிலே தாக்குகின்றதும், Cயில் உள்ள 8இரு. எடைக்குச் சமனும், இணையும், எதிருமானதுமாகிய ஒரு விசை. 7) ஒவ்வொன்றும் 4இரு. எடை விசை.

பயிற்சி 7

(1) $\frac{W}{2}$ (3) $\sin\theta = \frac{a}{a+l}$; $T=W\sec\theta$; $R=W\tan\theta$;

(4) $T=2\sqrt{5}$ இரு. எடை $R=2$ இரு. எடை (5) $R=W\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\alpha}$; $\theta=\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan\alpha)$ (6) $\theta=45°$ (7) $T=\frac{1}{2}W\sin\alpha\,\mathrm{cosec}\,\beta$ (9) $\frac{3}{5}$ இரு. எடை (11) வளையம் Aயிற்கு மேலே நிலைக்குத்தாக 8′ உயரத்தில் இருக்கிறது. $T=\frac{W\,2}{\sqrt{3}}$; $R=W\frac{1}{\sqrt{3}}$ (12) $\frac{2\sqrt{3}}{3}W$; $\frac{1}{3}\sqrt{3}W$

(13) $\frac{1}{2} < \frac{a}{l} < 1$ (16) இழையின் இரு பகுதிகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 2α எனின், $\cos^2\alpha = \frac{l^2-(a+b)^2}{4l^2}$, $\frac{(a+b)^2}{ab}$: θ என்பது அடிவானத்தோடு அக்கோலின் சாய்வாகுல், $\cos\theta = l\sin\alpha\,/\,(a+b)$; $T=W/2\cos\alpha$ (18) 8 கி. கிராம், 6 கி. கிராம் எடை. (19) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$; $\frac{6}{5}\sqrt{5}$ கி. கிராம் எடை (24) $h\sqrt{h^2+a^2\sin^2\alpha}\,/\,(h+a\cos\alpha)$ (26) $\tan^{-1}\left(\frac{\cot\beta-\cot\alpha}{2}\right)$: $W\sin\beta/\sin(\alpha+\beta)$; $W\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$.

30) $\tan^{-1}\frac{1}{3}$; $8\sqrt{5}$; $16\sqrt{5}$ (38) $\sqrt{7}$: $2\sqrt{3}$ (39) $T=\frac{5}{8}W$; $R=\frac{\sqrt{5}}{2}W$.

பயிற்சி 8·1

(4) $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$; $4(\sqrt{5}+1)$; $\frac{13+3\sqrt{5}}{2}$

பயிற்சி 8.2

(1) $T=\frac{W}{2}\sin 2a$; $S=\frac{1}{2}W$; $R=W\left(1-\frac{1}{2}\cos 2a\right)$ (2) $\frac{1}{6}W\sqrt{3}$

(3) $\frac{1}{2}W\cot a$; $\frac{5}{6}$ $W\cot a$ (5) $T=\frac{lW}{c}$;

$W\sqrt{\frac{l^2}{c^2}-\frac{3l}{c}\cos\beta+\frac{9}{4}}$ (இங்கு β என்பது இழை நிலைக்குத்துடன் உண்டாக்கும் கோணம்) (8) $T=\frac{W}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{b^2}$; $R=W.\frac{a}{b}$.

(10) $\frac{5}{18}$ கி. கிராம்; $17\frac{13}{18}$ கி. கிராம். (11) 8 கி. கிராம். (13) 60 கி. கிராம்; 75 கி. கிராம் (15) 15° 15°; $T=\frac{W}{6}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$;

$R=\frac{W}{6}(3\sqrt{2}-\sqrt{6})$. (16) $T=7\frac{1}{2}$; $R=6$; $S=16\frac{1}{2}$ (17) $T=3W$; $X=2W$; $Y=3W$ (18) $T=\frac{20\sqrt{2}}{8}$; $R=\sqrt{34}/2$

பயிற்சி 8.3

(1) $6\sqrt{2}$ இரு. எடை; AB க்கு 45° சாய்ந்துள்ளது; சுழலிணையின் திருப்புத் திறன் 8a; (2) தனி விசை $5P\sqrt{2}$; சுழலிணை 3Pa; (5) தனி விசை 6 இரு. எடை; சுழலிணை $\frac{21\sqrt{3}a}{2}$; (6) விசை$=2\sqrt{3}$; சுழலிணை $-3a$; தனி விசை AB, AF என்பவற்றின் மையப் புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லும். (8) A யில் உள்ள விசை $\sqrt{53}P$; அதன் திசை $\tan^{-1}\frac{7}{2}$; BC வழியே உள்ள விசை 5P ஆகும்,

பயிற்சி 8.4

(1) $P(x+y-1)+Q(y-x-1)-R\sqrt{2}(y-2)=0$. (3) 18·72 கிராம் எடை; $x-1\cdot2y+5=0$; $(-5, 0)$; $(0, 4\cdot16)$

பயிற்சி 8.5

(1) பக்கம் அடிவானத்தோடு $\tan^{-1}2$ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும். (3) R=135; X=108; Y=169

எதிர்த் தாக்கம். $=\sqrt{108^2+169^2}=200\cdot5$. (4) $(n+2)\sqrt{a^2+b_2}$ (5) 36 $(\sqrt{2}+1)$ கி. கிராம். (6) 12 கி. கிராம் (8) அந்த மேசையின் எடைக்குச் சமனான எடை (9) இழந்த காலுக்கு எதிரான காலை மையத்துடன் இணைக்கும் கோட்டில் மையத்திலிருந்து, அச்சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் மூன்றிலொரு பங்குக்குச் சமமான தூரத்தில். (10) 60 கிலோகிராம். (13) A யில் உள்ள எதிர்த் தாக்கம்

$$=\frac{W\cos A}{2\sin B\sin C};\ B\text{ யில் }\frac{W\cos B}{2\sin C\sin A};\ C\text{ யில் }\frac{W\cos C}{2\sin A\sin B}$$

பயிற்சி 9.1

(2) 10 கி கிராம் எடை; $12\frac{1}{2}$ கிலோ கிராம் எடை; அழுத்தம் $10\sqrt{17}$; அடிவானத்துடன் $\tan^{-1}4$ $\frac{15}{2}\sqrt{17}$ கிலோ கிராம் எடை; அடிவானத்துடன் $\tan^{-1}4$ (3) 4 கிலோ கிராம் எடை; 36 கிலோ கிராம் எடை; (4) $\mu=\frac{1}{4}$ (5) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ கிலோ. கிராம்; (6) 18 கிலோ கிராம் எடை (7) $\mu=\sqrt{3}/15$ (8) மிகப் பெரிய சாய்வுக் கோட்டோடு $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{3}}{9}$ $(=15°58')$ என்னும் கோணத்தை ஆக்கும் திசையில் இயங்கத் தொடங்கும்; (13) $\tan\alpha=\frac{1}{2}$; $T=\frac{W}{15}\sqrt{5}$.

பயிற்சி 9.2

(1) $5\frac{5}{6}$ கிலோ கிராம் (2) 45° (3) 50 அடி; ஏணியின் எடையில் கால் பங்கு.

(13) $W\frac{2\mu-\tan\alpha}{\tan\alpha-\mu}$; (14) $\sqrt{3}/30$.

பயிற்சி 9·3

(2) $2\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{12}$ (3) 1. (4) $\tan^{-1}1/2$; h=4r.

பயிற்சி 10·1

(1) $1\frac{1}{3}$; $1\frac{3}{5}$, $1\frac{3}{5}$ செ. மீ. (2) BC என்ற பக்கத்திலிருந்து W என்ற எடையின் தூரம் a எனில், A என்ற புள்ளியில் உள்ள அழுத்தம்

$= \frac{W}{3} + W. \frac{}{c \sin B}$ (3) 5:4. (9) $os^{-1} \frac{7}{25}$ (12) $\tan \alpha = \frac{2r)}{h}$

(13) $\frac{6}{3\sqrt{\pi/2}}$, (17) W/6.

பயிற்சி 10.2

(2) 1.7 செ. மீ. (4) அது மையத்தை ஐந்தாம் எடைக்குத் தொடுக்கும் கோட்டை 5 : 9 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும். (6) (16, 11) (7) $(3\frac{1}{2}, 2)$ (8) $\bar{x} = \frac{a}{24}(10+\sqrt{2})$;

$\bar{y} = \frac{a}{24}(12+\sqrt{2})$ (9) 13·35 (11) 2n/3 செ. மீ. (13) புவியீர்ப்பு மையம் 1 கிலோ கிராம் எடையிலிருந்து 4 டெசி மீட்டர் தூரத்தில் இருகின்றது. கோலின் எடை=3 கி. கிராம். (14) $\frac{16\sqrt{2}}{9}$ செ. மீ. (15) $2\triangle\ (2a+b+c)/3\ (a+b)\ (a+c)$ (16) 18.

பயிற்சி 10.3

(1) 5·875 செ. மீ. (2) 7·6 செ. மீ. (4) 1 : $\sqrt{2}$ (5) $2 \sin^{-1}1/3$, (10) அவ்விணைகரத்தின் மையத்திலிருந்து அதனுடைய தூரம் ஒரு பக்கத்தின் ஒன்பதில் ஒரு பங்கு. (11) மையத்திலிருந்து தூரம் மூலை விட்டத்தின் பன்னிரண்டில் ஒரு பங்கு (12) மையத்திலிருந்து தூரம் அச்சதுரத்தின் மூலை விட்டத்தின் 1/21 (13) அது எதிர் சமாந்திரப் பக்கங்களினுடைய மையங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டை 5 : 7 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும். (15) அது, GA என்பதை $\sqrt{m}-1$; $m\sqrt{m} - 3\sqrt{m}+1$ என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் (16) அம்முக்கோணத்தின் உயரம் $= \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ (அ-து) அச்சதுரப் பக்கத்தின் 0·634. (17) BCயின் மையப் புள்ளி D எனின் A′ என்பது AD யை இரு சமக்கூறிடும். (21) அது பெரிய கோளத்தின் மையத்திலிருந்து $\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}$ என்னும் தூரத்தில் இருக்கும். (22) தோண்டப்பட்ட பகுதியின் உயரம் அக்கூம்பின் உயரத்தில் மூன்றிலொன்றுகும். (23) முந்திய கூம்பின் அச்சை அது 3 : 5 என்னும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் (24) h என்பது அக்கூம்பின் உயரமாயின், 45h/56. (25) 33/19 அடி. (26) M என்பது அடிப் பாகத்தின் மையமாயின், $MG = h\ (a^2+b^2+2ab)/4\ (a^2+ab+b^2)$ (28) 11 : 49 (29) $h : r = \sqrt{3} : 1$

பயிற்சி 10·4

(1) $\left(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5}\right)$ (2) $\left(a\pi, \frac{4a}{3}\right)$ (3) $a\left(\pi - 4/3\right); \frac{2a}{3}$

(4) $\left(\frac{4a}{5}, O\right)$ (5) $\left(\frac{4a}{5}, \frac{4a}{5}\right)$ (6) $x - \frac{c(1y-c)}{s}; \frac{y}{2} + \frac{cx}{2s}$

(7) $\left[\frac{7\sqrt{2}+3\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{})}\right], O$

(8) $\frac{3\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}; \frac{4a}{3}\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}$

பயிற்சி 10·5

(1) $\left(\frac{4a}{3\pi}; \frac{4b}{3\pi}\right)$ (2) $\left(\frac{3h}{5}, O\right)$ (3) $\left(\frac{3a}{5}, \frac{3}{4}a\right)$ (4) $\left(\frac{9a}{5}, \frac{9a}{5}\right)$

(5) $\left(a\pi, \frac{5a}{6}\right)$ (6) $\left(\frac{9\pi^2-16}{18\pi}a, \frac{7a}{6}\right)$ (7) $\left(\frac{256\pi}{315}, \frac{256}{315}, \pi\right)$

(8) $(\pi/2, \pi/8)$ (9) a–c coth a/c+c cose ch a/c, 1/4 [c cosh a/c +a cosech a/c] (10) $\left(\frac{5a}{6}, o\right)$ (11) $\left(\frac{\pi a\sqrt{2}}{8}, o\right)$ (12) $\left(\frac{6a}{5}, \frac{9a}{20}\right)$

பயிற்சி 10·6

I (1) $\bar{x} = \frac{2h}{3}$ (2) $\bar{x} = \frac{2a}{3}$ (3) $\bar{x} = \frac{3a}{8}$ (4) $\bar{y} = \frac{3b}{8}$ (5) $\bar{x} = \frac{49}{5}$

(6) $\bar{y} = \frac{63\pi^2-64}{9\pi^2-16} \cdot \frac{a}{6}$ (7) $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$ (8) $\bar{x} = \frac{20}{9} a^{1/3} b^{2/3}$

II (1) $\bar{x} = \frac{3h}{5}$ (2) $\bar{x} = \frac{5a}{8}$

பயிற்சி 10·7

(1) $\bar{y} = \frac{2a}{15} \cdot \frac{15\pi-8}{3\pi-4}$ (2) $\bar{x} = \frac{50}{63}a$ (3) $\bar{x} = a/6\,(2+\sqrt{2})$

பிழை திருத்தம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
15	5	rnsmissibility	transmissibility
23	28	$=2\times 10\times \frac{3}{2}$	$=2\times 10\times \frac{\sqrt{3}}{2}$
33	3—6	ஒரு புள்ளியிலே.........குறிக்கக்கூடும். இதையே வேறு வகையாகக் கூறலாம்.	ஒரு புள்ளியிலே தாக்குகின்ற மூன்றுவிசைகள் சமநிலையிலிருந்தால், அவ்விசைகளிற்கு இணையாக ஒரு முக்கோணத்தின் பக்கங்கள் வரையப்பட்டால், அம்மூன்று விசைகளையும், முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களால் அளவிலும் திசையிலும் குறிக்கக் கூடும்.
40	2	$\frac{P}{\sin \quad OR} = \ldots\ldots$	$\frac{P}{\text{Sin } QOR} =$
44	21	அன்றியும் $T_4=\sqrt{3}, \quad T_2=1$	அன்றியும் $T_4=\sqrt{3}\ T_2=1$
66	15	விளைவைக்காணல்	விசைகளின் விளைவைக்காணல்
70	2	LO என்னுந்...	CO என்னுந்...
,,	9	LO திசையில்	CO திசையில்
,,	10	OL திசையில்	OC திசையில்
71	8	$\frac{P}{CB}=\frac{Q}{CA}=\frac{P-Q}{-CA}=\ldots$	$\frac{P}{CB}=\frac{Q}{CA}=\frac{P-Q}{CB-CA}=\ldots\ldots$
,,	4	$\therefore \frac{P}{CB}=\frac{O}{CA}=\frac{R}{AB}$	$\therefore \frac{P}{CB}=\frac{Q}{CA}=\frac{R}{AB}$
83	2	P.AC=Q.AB (1)	P.AC=Q.CB (1)

91	12	$2R_1 + 23 = 56$	$2R_1 + 23 = 156$
,,	15	திருப்புத்திறன் $PA \times B$.	திருப்புத்திறன் $P.AB$.
106	21	விளைவு $(P+Q-P)+Q$ விற்கு	விளைவு $(P+Q-P)=Q$ விற்கு
109	12	$=3\sqrt{3}\,Pa$	$=3\frac{\sqrt{3}}{2}Pa$
126	9	$\frac{R}{\sin\beta}=\frac{Q}{\sin a}=\frac{W}{\sin(a+\beta)}$	$\frac{R}{\sin\beta}=\frac{S}{\sin a}=\frac{W}{\sin(a+\beta)}$
141	21	$\sin=\theta\frac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$	$\sin\theta=\frac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$
170	13	$=(Y_1x_1-X_1y_1)-Y_1x'+x_1y'$	$=(Y_1x_1-X_1y_1)-Y_1x'+X_1y'$,
170	15	$=(Y_2x_2-x_2y_2)-Y_2x'+x_2y'$	$=(Y_2x_2-X_2y_2)-Y_2x'+X_2y'$
171	17	$R\neq O;\ O\neq$ எனில்,	$R\neq O;\ G=O$ எனில்,
173	8	$xy-YX=G$ என்பதாகும்.	$xY-yX=G$ என்பதாகும்.
182	22	$\frac{T_1}{1+3\cot B\cot C}-\frac{T_2}{1+3\cot\ \cot A}$	$\frac{T_1}{1+3\cot B\cot C}=\frac{T_2}{1+3\cot c\cot A}$
190	16	ஆயின், $\frac{W'}{W},\frac{W_1'}{W_1},\frac{W_2'}{W_2},\frac{W^3}{W_3}$	ஆயின், $\frac{W'}{W},\frac{W_1'}{W_1},\frac{W_2'}{W_2},\frac{W_3'}{W_3}$
193	22	எடை $W\rho$	எடை W
218	22	θ என்பது $\cot\theta=\cot 12\lambda-kr\operatorname{cosec}2\lambda$	θ என்பது $\cot\theta=\cot 2\lambda-kl\operatorname{cosec}2\lambda$
239	16	$\frac{\omega_2}{3}AO'=\frac{\omega_1}{3}.O'C'$	$\frac{\omega_2}{3}AO'=\frac{\omega_1}{3}O'C$
,,	17	$\omega_2 AO'=\omega_1.O'C'$	$\omega_2 AO'=\omega_1 O'C$
256	16	$=\frac{5}{14}$	$=\frac{5}{14}a$
,,	17	$60_0\ \bar{y}$	$\bar{y}=$
,,	,,	$+5W\times 2a$	$+5W.2a\sin 60^\circ+6Wa\sin 60^\circ$

பிழை திருத்தம்

பக்கம்	வரி	பிழை	திருத்தம்
269	23	$\therefore \frac{2S^2}{3a} = \pi r + HM(S - \pi r^2)$	$\therefore \frac{2S^2}{3a} = \pi r^3 + HM(S - \pi r^2)$
,,	25	$HM = \left[\frac{2S^2}{3a} - \pi\left(\frac{S}{s}\right)^2\right] \div \left[S - \pi\left(\frac{S}{s}\right)^2\right]$	$HM = \left[\frac{2S^2}{3a} - \pi\left(\frac{S}{s}\right)^3\right] \div \left[S - \pi\left(\frac{S}{s}\right)^2\right]$
278	13	$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_n}{\sum m_r}$	$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r}$
290	22	இனி, $2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, x dx =$	இனி, $2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, x dx$
		$-\int \sqrt{a^2 - x^2}\, 2x dx =$	$= -\int \sqrt{a^2 - x^2}\, (-2x dx)$
291	1	$a\ h = OM = a \cos \alpha$	$a - h = OM = a \cos \alpha$
314	9	$= \frac{c}{2}\left(\frac{x}{ec} + \frac{-x/c}{e}\right)$	$= \frac{c}{2}\left(e^{x/c} + e^{-x/c}\right)$
316	5	$\frac{1}{2} l = c\left(\frac{a}{c} + \frac{a^3}{6c}\right)$	$\frac{1}{2} l = c\left(\frac{a}{c} + \frac{a^3}{6c^3}\right)$

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	பை.
12.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	...	சி. சுந்தரராஜன்	... 10	75
13.	,, II	...	எஸ். குழந்தைநாதன்	... 10	50
14.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	...	கீ. சி. இராமசாமி	... 6	00
15.	,, ,, II	...	,,	... 6	00
16.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	...	தி. சி. மோகன்	... 5	00
17.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	...	மு. க. சுப்பிரமணியன்	... 11	00
18.	,, ,, II	...	பி. வி. சீனிவாசன்	... 6	50
19.	,, ,, III	...	,,	... 6	50
20.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	...	மா. குமாரசாமி	... 10	00
21.	,, ,, II	...	அர. சேஷாசலம்	... 9	50
22.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	...	தே. வேலப்பன்	... 10	00
23.	,, ,, II	...	ஜி. சிதம்பரம்	... 8	00
24.	பணம்—சிறு விளக்கம்	...	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	... 10	00
*25.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	...	கு. ஆளுடையபிள்ளை	... 9	50
26.	பத்தொன்பதாவது நூற்றாண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	...	கு. ரா. கருப்பண்ணன்	... 11	00
27.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	...	ஏ. குழந்தை	... 11	00
28.	,, ,, II	...	எஸ். குழந்தைநாதன்	... 7	00
*29.	வரவுசெலவுத் திட்டம்	...	ஆர். ரங்காச்சாரி	... 6	00
30.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	...	ஏ. குழந்தை	... 7	50
31.	,, ,, II	...	கே. எஸ். இராமசாமி	... 9	00

32.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
33.	,, ,, II	,,	7	00
34.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
35.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
36.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
37.	பொருளாதார வளர்ச்சி பற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
38.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857-1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
39.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*40.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*41.	,, ,, II	,,	3	50
*42.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I	டி. வி. சொக்கப்பா	4	50
43.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றாண்டு காலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
44.	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13	00
45.	,, ,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
46.	,, ,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00
47.	,, ,, V	,,	8	00

*மூலநூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

69.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	...	பா. மாணிக்கவேலு	...	5 00
70.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	...	6 00

அரசியல்

*71.	இந்திய அரசியலமைப்பு	...	வீ. கண்ணையா	...	4 75
72.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	டி. செல்லப்பா	...	8 50
73.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	...	8 50
74.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	...	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	...	16 00
75.	,, II	...	,,	...	13 25
76.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	9 00
77.	,, ,, II	...	அ. ஜெகதீசன்	...	7 25
78.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	வீ. கண்ணையா	...	7 50
79.	,, II	...	டி. செல்லப்பா	...	7 50
80.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	...	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	...	9 25
81.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	...	வீ. கண்ணையா	...	6 25
82.	,, ,, II	...	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	...	5 75
83.	,, ,, III	...	கி. ர. அனுமந்தன்	...	
*84.	மக்கள் ஆட்சி	...	க. சந்தானம்	...	4 25
85.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்	...	என். ஜே. ராஜகோபால்	...	7 75

*மூலநூல் (Original Book)

அரசியல் (தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
86.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்ஸ்	7	00
87.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
88.	,, ,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
89.	,, ,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

90.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
91.	,, II	,,	7	00
92.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
93.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
94.	,, II	,,	9	00
95.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
96.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ்	11	00
97.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*98.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25

தத்துவம்

99.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*100.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50

*101.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
102.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
103.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
104.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	3	50
105.	,, II	,,	6	00
106.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6	00

அறவியல்

107.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	மோ. கோ. காந்தி	8	50

அளவையியல்

108.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	50

மானிடவியல்

*109.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
110.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்ரமணியம்	5	50
111.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50

சமூகவியல்

112.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10	50

*மூலநூல் (Original Book)

			ரூ.	பை.
113.	ஆசியா—I	கோ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
114.	,, II	,,	8	75
115.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*116.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*117.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	8	25
118.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*119.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	4	00
*120.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*121.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*122.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	9	00
*123.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	6	25
*124.	சமூத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
125.	காலநிலை இயல்—I	கோ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
126.	,, II	,,	5	00
127.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	11	00
*128.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
129.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
130.	சிஷோமின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
131.	,, ,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
132.	,, ,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்		

புள்ளியியல்

*133.	புள்ளியியல்—அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10 00
134.	புள்ளியியல் முறைகள்—I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10 00
135.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14 00
136.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6 50

உயர் கணிதம்

*137.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	12 50
*138.	வகை நுண்கணிதம்	,,	8 00
*139.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	9 00
*140.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12 00

பௌதிகவியல்

141.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10 00

விஞ்ஞானம்

*142.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6 00
*143.	ரேடியோ	,, பி. திருஞானசம்பந்தம்	4 75

*மூலநூல் (Original Book)

விஞ்ஞானம்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை.
*144.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*145.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணுமலை	3	50
*146.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*147.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*148.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

மருத்துவம்

*149.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
150.	மகப்பேறும் மாதர் நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) மணிமேகலை	8	25
*151.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
152.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
153.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
154.	,, II	,,	5	50
155.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25

பொறியியல்

156.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50

கூட்டுறவு

157.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	... அ. வேல்மணி	... 5 50

சட்டம்

*158.	குற்றவியல் சட்டம்	... எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	... 10 00

பொது நூல்கள்

159.	மகாத்மா காந்தி	... சரஸ்வதி தங்கையன்	... 3 25
160.	விவசாயப் புரட்சி	... வி கார்த்திகேயன்	... 8 00
*161.	சேமக் கைநூல்	... ஆ. சுப்பிரமணியம்	... 2 50
*162.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	... எஸ். ஆர் பாலசுப்பிரமணியம்	... 9 00
*163.	உணவும் ஊட்டமும்	... தி. வேங்கிட கிருஷ்ணய்யங்கார்	... 4 50

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை (P.U.C.)

*164.	உலக வரலாறு	... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	... 4 50
*165.	பொருளாதாரம்	... ஜி. சிதம்பரம்	... 2 75
*166.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... கு. ஆளுடைய பிள்ளை	... 2 50
*167.	,, II	... ,,	... 2 25
*168.	பௌதிகம்	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	... 7 50

*மூலநூல் (Original Book)

புகுமுக வகுப்புகளுக்குரியவை—(தொடர்ச்சி)

No.	Title		Author		ரூ.	பை.
*169.	புகுமுக பௌதிகம்	...	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	5	75
*170.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	...	கே. ராஜகோபாலன்	...	7	00
*171.	,, II	...	,,	...	3	00
*172.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	...	டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	...	7	00
*173.	,, II	...	,, ,,	...	4	50
*174.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	ஆர். மகாதேவன்	...	4	75
*175.	,, II	...	,,	...	3	25
*176.	வேதியியல்	...	பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	...	7	00
*177.	புகுமுக வேதியியல்	...	சி. ஏ. பத்மநாபன்	...	5	50
*178.	விலங்கியல்	...	எஸ். ஆப்ரகாம்	...	4	00
*179.	புகுமுக விலங்கியல்	...	பெ. மா. அண்ணுமலை	...	7	25
*180.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	...	எஸ். சுந்தரம்	...	4	50

*மூலநூல் (Original Book)